



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«МИРЭА – Российский технологический университет»**  
**Колледж приборостроения и информационных технологий**

# **Методические указания по работе с математическими функциями программы EXCEL (раздел: Линейная алгебра)**

**по учебной дисциплине**

**ЕН.01 Высшая математика**

**Специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы**

**Составитель:**

Сапрыгина Светлана Васильевна, преподаватель высшей квалификационной категории  
Колледжа приборостроения и информационных технологий

Москва  
2018

# **ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ**

*Книга состоит из листов:*

- 1. Сложение матриц;*
- 2. Умножение матрицы на число;*
- 3. Умножение матриц;*
- 4. Транспонирование матриц;*
- 5. Вычисление определителей;*
- 6. Обратная матрица;*
- 7. СЛАУ. Метод Крамера;*
- 8. СЛАУ. Метод обратной матрицы.*

## Действия с матрицами

### Сложение матриц

Найти матрицу  $C=A+B$

I. Найдите сумму двух матриц  $A + B$  (по определению):

Сумма двух матриц  $A=(a_{ij})_{m,n}$  и  $B=(b_{ij})_{m,n}$  - матрица  $C=A+B$ , элементы которой соответствуют элементам  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц  $A$  и  $B$ .

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**РЕШЕНИЕ**

Матрица A

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

Матрица B

-2,6	0,0	4,5	11,0
2,2	-3,7	2,0	8,5
5,3	4,4	-8,2	4,0
12,0	3,7	3,0	-3,0

Матрица C


II. Найдите сумму двух матриц  $A + B$  с использованием матричных операций

1. Для этого выделите диапазон ячеек **K8:N11**, отведенный для матрицы C

2. Введите формулу: **=A9:D12+F9:I12**

3. Нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter** (ввод матричных операций)

Матрица суммы  $C=A+B$  получена. Обратите внимание на формулу в строке формул

После ввода она заключена в фигурные скобки { }. Это означает, что к диапазону ячеек применена матричная (табличная) операция.

**РЕШЕНИЕ**

Матрица A

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

Матрица B

-2,6	0,0	4,5	11,0
2,2	-3,7	2,0	8,5
5,3	4,4	-8,2	4,0
12,0	3,7	3,0	-3,0

Матрица C


III. Найдите сумму этих же матриц, предварительно задав им имена, соответственно A и B:

1. Для этого выделите диапазон ячеек, которому надо присвоить имя.
2. Выделенному диапазону задайте имя (Команда **Формулы\Присвоить имя**)
3. Найдите сумму матриц **A+B**, пользуясь матричными операциями и заданными именами. Введите имена матриц воспользуйтесь командой: **Формулы\Использовать в формуле**
4. Обратите внимание на полученную формулу.
5. Сравните ответы, полученные всеми способами.

#### РЕШЕНИЕ

Матрица A

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

Матрица B

-2,6	0,0	4,5	11,0
2,2	-3,7	2,0	8,5
5,3	4,4	-8,2	4,0
12,0	3,7	3,0	-3,0

Ма


## Умножение матрицы на число

Найдите произведение матрицы A на заданное число (по определению):

### РЕШЕНИЕ

Матрица A

-6,2	1,0	7,1	-3,3
3,2	2,3	0,4	6,4
2,3	4,8	2,1	3,1
1,5	-5,2	-2,0	4,0

Матрица C = t \* A,

$$c_{ij} = t \times a_{ij}$$

$$t = 2,4$$


### ЗАДАНИЕ

Для матриц A и B определите:

1.  $1,5A + 4B$

Матрица A

A:

1	-3	2	4
3	-4	5	1
2	-5	3	5
2	5	6	4

Матрица B

B:

2	5	6
1	2	5
1	3	2
2	5	6



## Умножение матриц

Матрица  $C_{m \times n} = A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$ ,

т.е. количество столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

I. Найдите произведение двух матриц  $A \cdot B$  (по определению):

### РЕШЕНИЕ

Матрица  $A_{4 \times 4}$

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

Матрица  $B_{4 \times 4}$

-2,6	0,0	4,5	11,0
2,2	-3,7	2,0	8,5
5,3	4,4	-8,2	4,0
12,0	3,7	3,0	-3,0

Для ряда действий над матрицами в ЭТ Excel разработаны стандартные функции "Математические".

- а). МУМНОЖ(массив1;массив2) - произведение матриц;
- в). МОБР(массив) - вычисление обратной матрицы;
- с). ТРАНСП(массив) - транспонирование матрицы.

II. Найдите произведение матриц с использованием функции **МУМНОЖ**.

### АЛГОРИТМ:

1. Выделите диапазон ячеек, в которых необходимо получить ответ.
2. Для вызова функции **МУМНОЖ** воспользуйтесь Мастером функций;

3. В появившемся диалоговом окне **Мастера функций** в качестве **массива 1** введите диапазон соответствующих матрице А;
4. В качестве **массива 2** - диапазон ячеек, соответствующих матрице В:
5. Нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Эта комбинация клавиш является **матричной**

*Если формула введена правильно, то в строке формул она будет заключена в фигурные скобки.*

## РЕШЕНИЕ

**Матрица А**

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

**Матрица В**

-2,6	0,0	4,5	11,0
2,2	-3,7	2,0	8,5
5,3	4,4	-8,2	4,0
12,0	3,7	3,0	-3,0

6. Сравните ответы, полученные двумя способами.

## ЗАДАНИЕ

Найдите произведение матриц:

**Матрица А**

2	3	6	4
4	6	1	2
5	7	2	5
-3	2	5	4

**Матрица В**

1	2	-1	4
3	4	3	1
5	6	-3	5
2	1	0	7

## Вычисление определителей

Вычисление значения определителя с использованием матричных операций и функции **МОПРЕД**.

### АЛГОРИТМ:

1. Выделите ячейку, в которой необходимо получить значение заданного определителя.
2. Выполните команду **Мастер функций**  $\Rightarrow$  категория **Математические**  $\Rightarrow$  **МОПРЕД**.
3. В появившемся диалоговом окне **Мастера функций** в качестве **массива** введите ячейки, соответствующих определителю.
4. Нажмите **ОК**.

### РЕШЕНИЕ

$$A = \begin{vmatrix} 1,2 & -3,1 & 1,0 & -3,3 \\ -3,0 & 5,5 & 0,4 & 6,4 \\ 4,8 & 7,9 & 2,1 & 3,1 \\ 0,0 & 2,4 & -5,2 & 4,0 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

### ЗАДАНИЕ

Вычислите определители:

1.  $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$

2.

$$\begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$



## Обратная матрица

Для заданной матрицы  $A$  найдите обратную матрицу  $A^{-1}$  с использованием операции **Специальная вставка**

### АЛГОРИТМ:

1. Выделите диапазон ячеек, отведенных для обратной матрицы  $A^{-1}$ .
2. Выполните команду **Мастер функций**  $\Rightarrow$  категория **Математические**  $\Rightarrow$  **МОБР**.
3. В появившемся диалоговом окне **Мастера функций** в качестве массива введите диапазон ячеек, соответствующих матрицы  $A$ .
4. Нажмите **ОК**.

### РЕШЕНИЕ

Матрица  $A_{m \times n}$

1,2	-3,1	1,0	-3,3
-3,0	5,5	0,4	6,4
4,8	7,9	2,1	3,1
0,0	2,4	-5,2	4,0

Матрица  $A^{-1}_{m \times n}$


### ПРОВЕРКА:

По определению матрица называется обратной, если определитель матрицы  $A$  не равен нулю ( $|A| \neq 0$ ) и  $A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  - единичная матрица.

### АЛГОРИТМ:

1. Вычислите определитель матрицы  $A$ :  $|A|$ .
2. Если определитель равен 0, то для матрицы  $A$  не существует обратной матрицы. Сделайте вывод. В противном случае, переходите к п. 3.
3. Выполните команду **Мастер функций**  $\Rightarrow$  категория **Математические**  $\Rightarrow$  **МОБР**.
4. Найдите произведение матриц  $A$  и  $A^{-1}$ .  
Вы должны получить единичную матрицу, сделать вывод.

## РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем определитель  $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

2.  $|A| \neq 0$

3. Находим произведение матриц  $A \cdot A^{-1} = E$

Матрица  $A$


Матрица  $A^{-1}$


4. Сделайте вывод.

## Решение систем линейных уравнений

### Правило Крамера

на примере системы трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = d_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 = d_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 = d_3 \end{cases}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{- определитель системы}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, которое ищется по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

АЛГОРИТМ:

1. Вычислите определитель системы  $\Delta$ .
2. Если  $\Delta \neq 0$ , то вычислите вспомогательные определители  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$ .
3. По формулам Крамера найдите решение заданной системы уравнений.
4. Если  $\Delta = 0$ , то система линейных уравнение имеет бесконечное множество решений. Вспомогательные определители равны 0:  $\Delta_x=0$ ,  $\Delta_y=0$ ,  $\Delta_z=0$ .
5. Если  $\Delta = 0$ , а ни один из вспомогательных определителей не равен 0:  $\Delta_x \neq 0$ ,  $\Delta_y \neq 0$ ,  $\Delta_z \neq 0$ , то система не имеет решения.
6. После решения целесообразно выполнить проверку, подставив найденные значения в исходную систему.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = -2 \\ 2X_1 - 3X_2 + 4X_3 + X_4 = 12 \\ 3X_1 + 4X_2 - 3X_3 + 9X_4 = 38 \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ**

1. Вычислим определитель системы  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & 4 & 1 \\ 38 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 12 & 4 & 1 \\ 3 & 38 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 38 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

$$\Delta_{x4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & -3 & 38 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{0000}}$$

3. Решение системы имеет вид:

$$X_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \boxed{\phantom{0000}}$$

$$X_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \boxed{\phantom{0000}}$$

$$X_3 = \boxed{\phantom{0000}}$$



## ПРИМЕР 2

Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера. *Выполните проверку.*

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 - 9X_3 + 8X_4 = 1 \\ 5X_1 + 18X_2 + 4X_3 + 5X_4 = -2 \\ 2X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 5 \\ 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 - 2X_4 = 3 \end{cases}$$

1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{vmatrix} = \phantom{000000}$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{vmatrix} = \phantom{000000}$$

$$\Delta_{x2} =$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{vmatrix} = \phantom{000000}$$

$$\Delta_{x4} =$$

ПРОВЕРКА

## Решение систем линейных уравнений

### Метод обратной матрицы

Методом обратной матрицы решаются системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, определитель которых не равен 0

Матричное уравнение имеет вид:  $X = A^{-1}B$

#### АЛГОРИТМ:

1. Вычислите определитель системы  $\Delta$ .
2. Если  $\Delta \neq 0$ , то запишите систему в форме матричного уравнения.
3. Вычислите обратную матрицу для матрицы  $A$ :  $A^{-1}$ ;
4. Найдите произведение матриц  $A^{-1}B$
5. Результат - в форме матрицы.
6. После решения целесообразно выполнить проверку, подставив най

#### ПРИМЕР 1

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 = 1 \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 = -5 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 8 \end{cases}$$

#### РЕШЕНИЕ

1. Вычислим определитель системы  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\phantom{000}}$$

2. Запишем заданное уравнение в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} \phantom{x} & \phantom{x} & \phantom{x} \\ \phantom{x} & \phantom{x} & \phantom{x} \\ \phantom{x} & \phantom{x} & \phantom{x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{bmatrix}$$

3. Вычисляем матрицу, обратную данной:

**Матрица  $A^{-1}$**


4. Согласно формуле, находим произведение матриц  $A^{-1}$  и  $B$

<b>Матрицы</b>	<b><math>A^{-1}</math></b>		<b><math>B</math></b>		<b><math>X</math></b>															
	<table> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>										•	<table> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> </table>				=	<table> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> </table>			

ОТВЕТ:       $x_1 =$ 

--

 $x_2 =$ 

--

 $x_3 =$ 

--

ПРОВЕРКА

-6,2	1,0	7,1	-3,3
3,2	2,3	0,4	6,4
2,3	4,8	2,1	3,1
1,5	-5,2	-2,0	4,0


5. Сравните ответы, полученные двумя способами.



## Транспонирование матриц

Транспонирование матрицы - операция над матрицей, при которой ее строки становятся столбцами, а столбцы - строками.

I. Для заданной матрицы  $A$  найдите транспонированную матрицу  $A^T$  (по определению)

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

### РЕШЕНИЕ

Матрица  $A_{m \times n}$

-6,2	1,0	7,1	-3,3
3,2	2,3	0,4	6,4
2,3	4,8	2,1	3,1
1,5	-5,2	-2,0	4,0

Матрица  $A^T_{m \times n}$


II. Для заданной матрицы  $A$  найдите транспонированную матрицу  $A^T$  использованием операции **Специальная вставка**

### АЛГОРИТМ:

1. Выделите диапазон ячеек, отведенных для матрицы  $A$  (A20:D23).
2. Скопируйте выделенный диапазон.
3. Установите курсор в первую ячейку диапазона, с которого строится транспонированная матрица.
4. Выполните команду **Специальная вставка**  $\Rightarrow$  **Команда Транспонировать**:

### РЕШЕНИЕ

Матрица  $A_{m \times n}$

Матрица  $A^T_{m \times n}$