

Решение задач содержащих модуль

(Элективный курс)

Выполнила Карпеева Л.Г.

учитель математики

УВЦ МЖК МОУ СОШ №61

Чебоксары 2007

Содержание

- 1.** Пояснительная записка
- 2.** Цели курса
- 3.** Задачи курса
- 4.** Требования к уровню усвоения учебного материала
- 5.** Содержание курса
- 6.** Календарно-тематическое планирование
- 7.** Задачи
- 8.** Темы творческих работ
- 9.** Заключение
- 10.** Литература

Пояснительная записка

Понятие абсолютной величины (модуля) является одной из важнейших характеристик числа как в области действительных, так и в области комплексных чисел.

Это понятие широко применяется не только в различных разделах школьного курса математики, но и в курсах высшей математики, физики и технических наук, изучаемых в вузах. Например, в теории приближенных вычислений используются понятия абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа. В механике и геометрии изучаются понятия вектора и его длины (модуля вектора). В математическом анализе понятие абсолютной величины числа содержится в определениях таких основных понятий, как предел, ограниченная функция и др. Задачи, связанные с абсолютными величинами, часто встречаются на математических олимпиадах, вступительных экзаменах в вузы и на ЕГЭ.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний о модулях, их свойствах, полученных учащимися за весь период обучения.

Курс рассчитан на учащихся 9-11 классов общеобразовательных школ, проявляющих интерес к изучению математики.

Курс позволит школьникам систематизировать, расширить и укрепить знания, связанные с абсолютной величиной, подготовиться для дальнейшего изучения тем, использующих это понятие, научиться решать разнообразные задачи различной сложности, способствует выработке и закреплению навыков работы на компьютере.

Курс поможет наиболее качественно подготовить учащихся к математическим олимпиадам, сдаче ЕГЭ и экзаменов при поступлении в вузы.

Программа элективного курса предполагает знакомство с теорией и практикой рассматриваемых вопросов и рассчитана на 34 часа: 7,5 часов лекций и 26,5 часов практических занятий.

Программа содержит темы творческих работ и список литературы по предложенным темам.

В процессе изучения данного курса предполагается использование различных методов активизации познавательной деятельности школьников, а также различных форм организации их самостоятельной работы.

Результатом освоения программы курса является представление школьниками творческих индивидуальных и групповых работ на итоговом занятии.

Цели курса:

обобщение и систематизация, расширение и углубление знаний по теме «Абсолютная величина»; обретение практических навыков выполнения заданий с модулем; повышение уровня математической подготовки школьников.

Задачи курса:

- вооружить учащихся системой знаний по теме «Абсолютная величина»;
- сформировать навыки применения данных знаний при решении разнообразных задач различной сложности;
- подготовить учащихся к ЕГЭ;
- сформировать навыки самостоятельной работы, работы в малых группах;
- сформировать навыки работы со справочной литературой, с компьютером;
- сформировать умения и навыки исследовательской работы;
- способствовать развитию алгоритмического мышления учащихся;
- способствовать формированию познавательного интереса к математике.

Требования к уровню усвоения учебного материала

В результате изучения программы элективного курса «Абсолютная величина (модуль)» учащиеся получают возможность **знать и понимать:**

- определение абсолютной величины действительного числа;
- основные операции и свойства абсолютной величины;
- правила построения графиков уравнений (в т.ч. функций), содержащих знак абсолютной величины;
- алгоритмы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Уметь:

- применять определение, свойства абсолютной величины действительного числа к решению конкретных задач;
- читать и строить графики функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины;
- решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Содержание курса

(1 ч в неделю, всего 34 ч)

1. Введение (1 ч).

Цели и задачи элективного курса. Вопросы, рассматриваемые в курсе и его структура. Знакомство с литературой, темами творческих работ. Требования, предъявляемые к участникам курса. Аукцион «Что я знаю об абсолютной величине?».

2. Абсолютная величина действительного числа a (4 ч).

Абсолютная величина действительного числа a . Модули противоположных чисел. Геометрическая интерпретация понятия модуля a . Модуль суммы и модуль разности конечного числа действительных чисел. Модуль разности модулей двух чисел. Модуль произведения и модуль частного. Операции над абсолютными величинами. Упрощение выражений, содержащих переменную под знаком модуля. Применение свойств модуля при решении олимпиадных задач.

3. Графики уравнений (в т.ч. функций), аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины (5 ч).

Применение компьютерной программы «Advanced Grapher» при построении графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля. Правила и алгоритмы построения графиков уравнений, аналитическое выражение которых содержит знак модуля. Графики уравнений

$$y = f|x|,$$

$$y = f(-|x|),$$

$$y = |f(x)|,$$

$$y = |f|x|,$$

$$|y| = f(x), \text{ где } f(x) \geq 0,$$

$$|y| = |f(x)|.$$

Графики некоторых простейших функций, заданных явно и неявно, аналитическое выражение которых содержит знак модуля. Графики уравнений (в т.ч. функций), аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины в олимпиадных заданиях.

4. Уравнения, содержащие абсолютные величины (11 ч).

Основные методы решения уравнений с модулем. Раскрытие модуля по определению, переход от исходного уравнения к равносильной системе, возведение в квадрат обеих частей уравнения, метод интервалов, графический метод, использование свойств абсолютной величины. Уравнения вида

$$|f(x)| = a,$$

$$f|x| = a, \text{ где } a \in \mathbb{R},$$

$$|f(x)| = g(x) \text{ и}$$

$$|f(x)| = |g(x)|.$$

Метод замены переменных при решении уравнений, содержащих абсолютные величины. Метод интервалов при решении уравнений, содержащих абсолютные величины. Уравнения вида

$$|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \dots \pm |f_n(x)| = a, \text{ где } a \in \mathbb{R},$$

$$|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \dots \pm |f_n(x)| = g(x).$$

Способ последовательного раскрытия модуля при решении уравнений, содержащих «модуль в модуле». Графическое решение уравнений, содержащих абсолютные величины. Использование свойств абсолютной величины при решении уравнений. Уравнения с параметрами, содержащие абсолютные величины. Защита решенных олимпиадных заданий.

5. Неравенства, содержащие абсолютные величины (7 ч).

Неравенства с одним неизвестным. Основные методы решения неравенств с модулем. Неравенства вида

$$|f(x)| > a, \text{ где } a \in \mathbb{R}.$$

Неравенства вида

$$|f(x)| > g(x),$$

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

Метод интервалов при решении неравенств, содержащих знак модуля. Неравенства с параметрами, содержащие абсолютные величины. Неравенства с двумя переменными.

6. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины (4 ч).

7. Другие вопросы, при решении которых используется понятие абсолютной величины (1 ч).

8. Итоговое занятие (1 ч).

Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Название раздела (количество часов)	Тема Задания	Дата проведе ния
1.	Введение (1 ч.)	1. Введение	
2.	Абсолютная величина действительного числа a (4)	2. Абсолютная величина действительного числа a . Основные теоремы.	
		3. операции над абсолютными величинами	
		4. упрощение выражений, содержащих переменную под знаком модуля.	
		5. Применение свойств модуля при решении олимпиадных задач.	
3.	Графики функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины (5 ч)	6. применение компьютерной программы «Advanced Grapher» при построении графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля.	
		7. правила и алгоритмы построения графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля.	
		8. Графики функций $y = f x $ $y = f(- x)$, $y = f(x) $, $y = f x $, $ y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$, $ y = f(x) $	
		9. Графики некоторых простейших функций, заданных явно и неявно, аналитическое выражение которых содержит знак модуля.	
		10. Графики функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины в олимпиадных заданиях	
4.	Уравнения, содержащие абсолютные величины	11. основные методы решения уравнений с модулем	
		12. основные методы решения уравнений с модулем	

		13. основные методы решения уравнений с модулем	
		14. уравнения вида $ f(x) = a$, $f x = a$, где $a \in R$, $ f(x) = g(x)$ и $ f(x) = g(x) $	
		15. метод замены переменных при решении уравнений, содержащих абсолютные величины	
		16. Метод интервалов при решении уравнений, содержащих абсолютные величины. Уравнения вида $ f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) = a$, где $a \in R$, $ f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) = g(x)$	
		17. способ последовательного раскрытия модуля при решении уравнений, содержащих «модуль в модуле»	
		18. Графическое решение уравнений, содержащих абсолютные величины	
		19. использование свойств абсолютной величины при решении уравнений	
		20. Уравнения с параметрами, содержащие абсолютные величины	
		21. Защита решенных олимпиадных заданий	
5.	Неравенства, содержащие абсолютные величины (7 ч)	22. Неравенства с одним неизвестным. Основные методы решения неравенств с модулем.	
		23. Основные методы решения неравенств с модулем	
		24. Неравенства вида $ f(x) > < \geq \leq a$, где $a \in R$	
		25. неравенства вида $ f(x) > < \geq \leq g(x)$, $ f(x) > < \geq \leq g(x) $	
		26. Метод интервалов при решении неравенств, содержащих знак модуля	
		27. Неравенства с параметрами, содержащие абсолютные величины	
		28. Неравенства с двумя переменными	
	6. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины (4 ч)	29. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины	

		30. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины	
		31. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины	
		32. Системы уравнений и неравенств, содержащие абсолютные величины	
7.	Другие вопросы, при решении которых используется понятие абсолютной величины (1 ч)	33. Другие вопросы, при решении которых используется понятие абсолютной величины	
8.	Итоговое занятие	34. Итоговое занятие	

Задачи

1. Нанесите на числовую ось числа, модуль которых равен 3.
2. Нанесите на числовую ось точки, расстояние от которых до точки 1 равно трем.
3. Запишите с помощью модуля утверждения: «Расстояние от точки x до точки 5 равно 2». Найдите все точки x .
4. Докажите, что $|x| = |-x|$.

Линейные уравнения и неравенства.

5. Решите уравнения:

- 1) $|x - 1| = 2$; 5) $|5x + 2| = -2$; 9) $|x + 1| + |x + 2| = 1$;
- 13) $|x + 1| = |x - 5|$;
- 2) $|x + 3| = 1$; 6) $||x| - 1| = 2$; 10) $|x - 5| - |x - 1| = 2$;
- 14) $|x| = |4 - x|$;
- 3) $|2x + 1| = 4$; 7) $|x| + |x - 3| = 5$; 11) $|x + 3| - |x - 2| = 5$;
- 15) $||x| - 4| = 1$;
- 4) $|3x - 2| = 6$; 8) $|x - 1| + |x - 5| = 3$; 12) $|x - 1| = 2|x - 4|$;
- 16) $||x - 1| - 1| = 2$;
- 17) $|x^2 - 9| = 5$; 18) $x^2 + 3|x| - 18 = 0$; 19) $|2x^2 + x - 3| + x = 1$;
- 20) $|x^2 - 1| = |x^2 - x + 1|$;
- 21) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$; 22) $|3x - 5| = |x + 2|$; 23) $|x^2 - 1| = (x - 1)(x + 1)$.

6. Решите неравенства:

- 1) $|x| \geq 1$; 2) $|x - 1| \leq 5$;
- 3) $|x + 2| \geq 2$; 4) $|x + 5| < 1$;
- 5) $|2 - x| > 3$; 6) $|3 + x| \leq 1$;
- 7) $|2x - 3| < 5$; 8) $|1 + 2x| > 1$;
- 9) $|x| + |x - 1| \leq 1$; 10) $||x - 2| < 1$;
- 11) $|x + 1| < |x - 3|$; 12) $|x| - |x - 1| < 2$;

13) $|x| > 2|x - 2|;$

15) $||x| - 5| \leq 2;$

14) $|x - 1| \leq |x + 5|;$

16) $||x+1| + 1| \leq 3.$

Запись выражений без знака модуля

7. Раскройте модули в следующих выражениях:

1) $y = |x^2 - 4| + |x|;$

3) $|-3,1|;$

5) $|n^2 - 10|;$

7) $|2 - \sqrt{5}|;$

9) $|x + 4|;$

11) $|2x - 1|;$

13) $||x| + 1|.$

2) $y = |6 - x - x^2| + x^2;$

4) $|3 - \sqrt{10}|;$

6) $|2^3 - 3^2|;$

8) $|x - 3|;$

10) $|5 - x|;$

12) $|x| + |x - 1|;$

Построение графиков

8. Постройте графики следующих функций:

1) $y = |x^2 - 1|;$

3) $y = |x^2 - x - 6| + x;$

5) $y = |x + 2|;$

7) $y = 3|x - 2|;$

9) $y = |x - 2| - x;$

11) $y = |x - 1| - |x + 3|;$

13) $y = |x^2 - 9| + x^2.$

2) $y = x^2 - |x| - 2;$

4) $y = |x^2 - x| + |x^2 + x|;$

6) $y = |1 - 2x|;$

8) $y = |x| + |x - 3|;$

10) $y = 2|x - 1| + |x + 1|;$

12) $y = ||x| - 1|;$

Доказательство неравенств с модулем

9. Докажите неравенства:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$

2) $|x + y| \geq |x| - |y|$

3) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

4) $|x + y + z| \geq |x| - |y| - |z|$

Множества на плоскости, задаваемые с помощью модуля

10. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

1) $|x| = 1;$

2) $|x| \leq 1;$

3) $|x + 3| < 2;$

4) $|3x - 2| > 6;$

5) $|y| = 2$

6) $|y| \leq 1;$

$$\begin{aligned} 7) & |y + 2| \leq 1; \\ 8) & |3 - 2x| > 4; \\ 9) & |x + 2| \leq 1 \\ & |y - 1| \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) & |x - 2| \leq 1, \\ & |y| \geq 2. \end{aligned}$$

Решение уравнений и неравенств с модулем по графику

11. По графику функции $y = f(x)$ решите уравнения и неравенства:

$$\begin{aligned} 1) & |f(x)| = 1; \\ 2) & |f(x) - 2| = 1; \\ 3) & |f(x)| \leq 1; \\ 4) & |f(x) - 2| \leq 2. \end{aligned}$$

12. Используйте графики, решите неравенства:

$$\begin{aligned} 1) & ||x| - 3| \leq 1; \\ 2) & |x^2 - 5| \leq 4; \\ 3) & ||x - 1| - 2| \geq 3 \\ 4) & |x^2 + 2x| \leq 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \text{ а) } & |3x - 9| \geq 6; \\ & б) |4 - 2x| < 16; \\ & в) |5x + 10| \leq 15; \\ & г) |9 + 3x| + 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \text{ а) } & |6x - 1| > 2; \\ & б) |3 + 2x| \leq 4; \\ & в) |9x - 1| < 4; \\ & г) |5 - 6x| \geq 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \text{ а) } & |x + 1| \leq 2x; \\ & б) |3x - 4| > x + 1; \\ & в) |2x - 1| \geq x; \\ & г) |16 - 8x| < 4x + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15. \text{ а) } & |2x - 1| + |3x - 6| < 12; \\ & б) |3x - 4| - |x + 2| \geq 4. \end{aligned}$$

16. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{а) } y = |x|, y = -|x| + 2.$$

б) $y = |x + 1|$, $y = -(x - 1)^2 + 2$.

в) $y = |x| - 2$, $y = x/2$.

г) $y = (x - 1)^2$, $y = -|x + 1| + 2$.

17. а) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$.

б) $y = x^2$, $y = 2 - |x|$.

18. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке:

а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[0; 4]$.

б) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[-5; 0]$.

в) $y = x^2 + 8|x| + 7$, $[1; 5]$.

19. а) $|\cos x| = 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x$;

б) $\sin x = \sqrt{3} \cos x + 2 |\sin x|$.

20. а) $|\sin x| = |\cos x|$

б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x = 2 |\cos x|$

в) $|\sin 2x| = |\sqrt{3} \cos 2x|$

г) $\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 2 |\sin x| = 0$

Темы творческих работ

1. Графическое и аналитическое решение уравнений содержащий модуль.
2. Графики функций содержащие абсолютную величину.
3. Графики функций, содержащие модуль.
4. Симметрия и абсолютная величина.
5. Применение модуля в механике и векторной алгебре.

Проверь себя.

Решить уравнения.

1.

$$|x^2 - 4x + 3| = -2$$

2.

$$|x^2 - 6x - 7| = \sqrt{3} - 2$$

3.

$$|x| = -x^2 - 1$$

4.

$$x^2 + 4|x| + 1 = 0$$

5.

$$x|x| = -\frac{1}{x}$$

6.

$$\left|\frac{1}{x}\right| = -x^2$$

7.

$$x - |x| = |x + 1|$$

8.

$$2x - x^2 - 1 = |x|$$

Проверь себя.

Решите уравнения и укажите букву правильного ответа.

1. $|x| = -x^2$

2. $|x - 2| = -(2 - x)^2$

3. $|x - 3| = 6x - x^2 - 9$

4. $|x + 2| = -|x^2 - 4|$

5. $|x| = x$

6. $|x^2 - 1| = 1 - x^2$

7. $\frac{|x|}{x} = 1$

8. $\frac{|x - 3|}{3 - x} = 1$

9. $|x - 2| = |2 - x|$

а) любое число, б) $x=0$, в) $x<3$, г) $x=2$,

д) $x= -3$, е) $x>0$

ж) $x=3$,

з) $x= -2$

и) $x\geq 0$

к) $-1\leq x\leq 1$

Решите неравенства.

1. $|x| > -1$

2. $|x^2 - 3x - 2| < -1$

3. $|x^2 - 4| \leq 0$

4. $|x| > |x - 4|$

5. $|x| \geq -|x(x - 1)|$

6. $|x| \geq -x$

7. $\frac{|x|}{x} \geq 1$

8. $|x| + x \leq -x^2$

9. $\frac{x}{|x - 1|} > 0$

Заключение

При решении задач содержащих модуль происходит повторение и, как следствие, более прочное усвоение программных вопросов. Ученики расширяют свой математический кругозор, при этом происходит развитие математического мышления, умение анализировать, сравнивать и обобщать. Решение задач такого рода это помощь при подготовки к экзаменам. Происходит формирование таких качеств личности, как трудолюбие, целеустремленность, усидчивость, сила воли и точность.

Теоретические основы решения задач
содержащие модуль
(абсолютную величину)

Введение:

Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера». Это многозначное слово(омоним), которое имеет множество значений и применяется не только в математике, но и в архитектуре, физике, технике, программировании и других точных науках.

В архитектуре-это исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения и служащая для выражения кратных соотношений его составных элементов.

В технике-это термин, применяемый в различных областях техники, не имеющий универсального значения и служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например модуль зацепления, модуль упругости и .т.п.

Модуль объемного сжатия(в физике)-отношение нормального напряжения в материале к относительному удлинению.

2. Понятия и определения

Чтобы глубоко изучать данную тему, необходимо познакомиться с простейшими определениями, которые будут необходимы:

Уравнение-это равенство, содержащее переменные.

Уравнение с модулем - это уравнение, содержащие переменную под знаком абсолютной величины(под знаком модуля).Например: $|x|=1$

Решить уравнение-это значит найти все его корни, или доказать, что корней нет.

В математике модуль имеет несколько значений, но мы возьмем лишь одно:

Модуль-абсолютная величина числа, равная расстоянию от начала отсчета до точки на числовой прямой.

Определение. Модуль числа a или абсолютная величина числа a равна a , если a больше или равно нулю и равна $-a$, если a меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля.

1. $|-a| = |a|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a^2| = a^2$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $|a : b| = |a| : |b|$; $b \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. $|a - b| \geq |a| - |b|$

Графики простейших функций, содержащих знак абсолютной величины

Под простейшими функциями будем понимать алгебраическую сумму модулей линейных выражений. Сформулируем утверждение, позволяющее строить графики таких функций, не раскрывая модули (что особенно важно, когда модулей достаточно много): "Алгебраическая сумма модулей n линейных выражений представляет собой кусочно-линейную функцию, график которой состоит из $n-1$ прямолинейных отрезков и двух лучей. Тогда график может быть построен по $n+2$ точкам, n из которых представляют собой корни внутримодульных выражений, ещё одна -- произвольная точка с абсциссой, меньшей меньшего из этих корней и последняя -- с абсциссой, большей большего из корней.

Например:

1) $f(x) = |x - 1|$ Вычисляя функции в точках 1, 0 и 2, получаем график, состоящий из двух отрезков (рис.1)

2) $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ Вычисляя значение функции в точках с абсциссами 1, 2, 0 и 3, получаем график, состоящий из двух отрезков прямых. (рис.2)

3) $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ Для построения графика вычислим значения функции в точках 1, 2, 3, 0 и 4 (рис.3)

$f(x) = |x - 1| - |x - 2|$ График разности строится аналогично графику суммы, то есть по точкам 1, 2, 0 и 3.

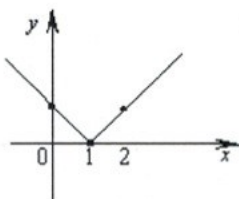


Рис.1

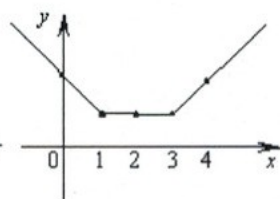


Рис. 2

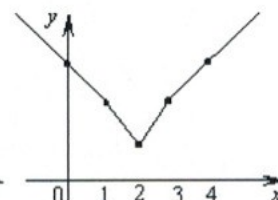


Рис.3

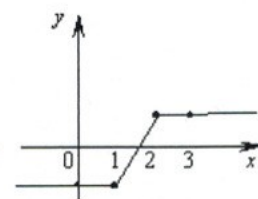


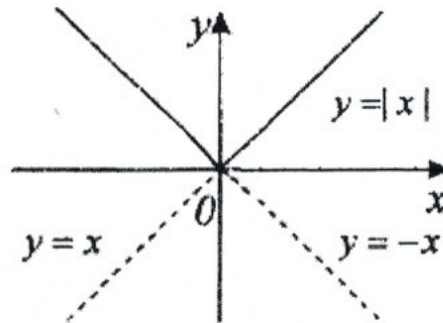
Рис.4

Построение графиков функций, содержащих знак модуля.

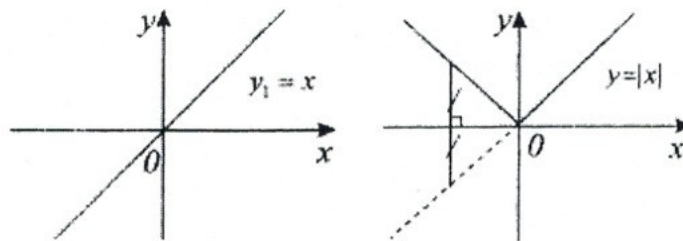
При построении графиков функций, содержащих знак модуля, применяются, в основном, те же приемы, что при решении уравнений с модулем. Основным действием при этом является «снятие модуля». Однако при построении графиков эта операция иногда даже упрощается, так как она может быть заменена геометрическими преобразованиями графиков.

Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Первый способ. Раскроем знак модуля согласно его определению: $y = x$ при $x \geq 0$, $y = -x$ при $x < 0$. Таким образом, искомый график совпадает с графиком функции $y = x$ при $x \geq 0$ (в правой полуплоскости) и с графиком функции $y = -x$ при $x < 0$ (в левой полуплоскости). Руководствуясь этим, строим график.



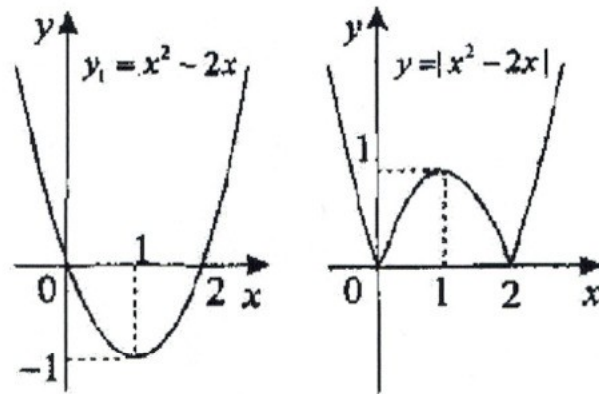
Второй способ. Можно рассматривать функцию $y = |x|$ как модуль функции $y_1 = x$. Модуль не меняет график в верхней полуплоскости и отражает части графика, находящиеся в нижней полуплоскости, в верхнюю полуплоскость симметрично координатной оси Ox .



Эти два эквивалентных метода являются основными при построении графиков функций, содержащих знак модуля.

Построить график функции $y = |x^2 - 2x|$.

Решение. Сначала построим график функции $y_1 = x^2 - 2x$, а затем применим к нему операцию «модуль»

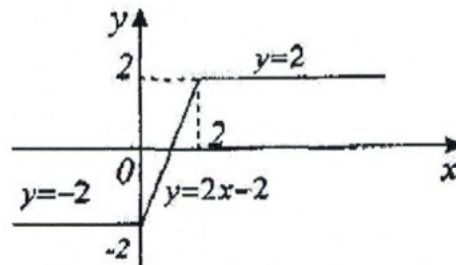


Построить график функции $y = |x| + |2 - x|$.

Решение. Здесь знак модуля входит в два различных слагаемых и его нужно снимать тем же методом, который применяется при решении уравнений и неравенств:

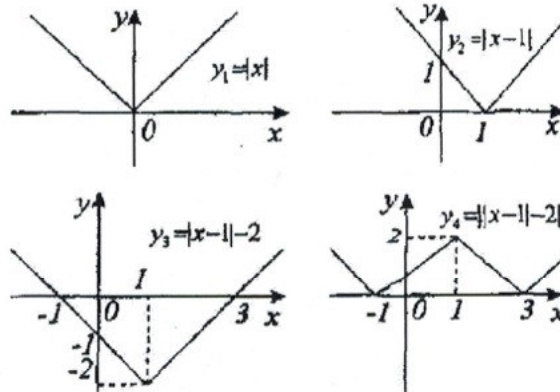
$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x < 0 \\ y = -2 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}$$

График данной функции «склеиваем» из графиков трех линейных функций.



Построить график функции $y = ||x-1|-2|$.

Решение. В данном случае имеется «матрешка» из модулей, но мы поступим иначе, чем при решении уравнений. Мы построим график функции $y = |x-1|-2$ и применим к нему операцию «модуль». График функции $y_3(x)$ построим с помощью преобразования графика функции $y_1 = |x|$.



Решение при помощи зависимостей между числами a и b , их модулями и квадратами этих чисел.

Существует определённая равносильность между числами и модулями данных чисел, а также между квадратами и модулями данных чисел:

$$(1) \quad |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \text{ или } a=-b$$

$$a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b \text{ или } a=-b.$$

Отсюда в свою очередь получим, что

$$(2) \quad |a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2$$

Пример. Решим уравнение $|x+1|=|2x-5|$ двумя различными способами.

Первый способ:

Учитывая соотношение (1), получим:

$$\begin{array}{ll} x+1=2x-5 & \text{или} \quad x+1=-2x+5 \\ x-2x=-5-1 & x+2x=5-1 \\ -x=-6 & 3x=4 \\ x=6 & x=1 \quad 1/3 \end{array}$$

Корень первого уравнения $x=6$, корень второго уравнения $x=1 \frac{1}{3}$.

Таким образом корни исходного уравнения $x_1=6$, $x_2=1 \frac{1}{3}$.

Второй способ:

В силу соотношения (2), получим $(x+1)^2=(2x-5)^2$

Раскроем скобки.

$$\begin{array}{l} x^2+2x+1=4x^2-20x+25 \\ x^2-4x^2+2x+1+20x-25=0 \\ -3x^2+22x-24=0 \quad | :(-1) \\ 3x^2-22x+24=0 \end{array}$$

$$a=3; b=-22; c=24.$$

$$D=b^2-4ac=(-22)^2-4 \cdot 3 \cdot 24=484-288=196$$

$196>0$ - значит, уравнение имеет 2 корня.

$$x_1=6$$

$$x_2=4/3$$

Как показывает решение, корнями данного уравнения также являются числа $4/3$ и 6 .

Пример. Решим уравнение $(2x+3)^2=(x-1)^2$.

Учитывая соотношение (2), получим, что $|2x+3|=|x-1|$, откуда по образцу предыдущего примера (и по соотношению (1)):

$$\begin{array}{ll} 2x+3=x-1 & \text{или} & 2x+3=-x+1 \\ 2x-x=-1-3 & & 2x+x=1-3 \\ x=-4 & & 3x=-2 \\ & & x=-2/3 \end{array}$$

Таким образом корнями уравнения являются $x_1=-4$, $x_2=-2/3$.

Пример. Решим уравнение $|x-6|=|x^2-5x+9|$.

Пользуясь соотношением (1), получим:

$$\begin{array}{ll} x-6=x^2-5x+9 & \text{или} & x-6=-(x^2-5x+9) \\ -x^2+5x+x-6-9=0 & & x-6=-x^2+5x-9 \\ -x^2+6x-15=0 & | :(-1) & x^2-5x+x+9-6=0 \\ x^2-6x+15=0 & & x^2-4x+3=0 \\ a=1; b=-6; c=15 & & a=1; b=-4; c=3 \\ D=b^2-4ac=(-6)^2-4 \cdot 1 \cdot 15= & & D=b^2-4ac=(-4)^2-4 \cdot 1 \cdot 3=16-12=4 \\ =36-60=-24 & & 4>0 \Rightarrow \text{уравнение имеет 2 корня} \\ -24<0 \Rightarrow \text{корней нет} & & x_1=3 \\ & & x_2=1 \end{array}$$

Проверим:

$$\begin{array}{ll} |1-6|=|1^2-5 \cdot 1+9| & |3-6|=|3^2-5 \cdot 3+9| \\ 5=5 & 3=|9-15+9| \\ & 3=3 \end{array}$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=3$.

Использование геометрической интерпретации модуля для решения уравнений.

Геометрический смысл модуля разности величин – это расстояние между ними. Например, геометрический смысл выражения $|x-a|$ – длина отрезка координатной оси, соединяющей точки с абсциссами a и x . Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких решений.

Пример. Решим уравнение $|x-1|+|x-2|=1$ с использованием геометрической интерпретации модуля.

Будем рассуждать следующим образом : исходя из геометрической интерпретации модуля , левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки абсцисс x до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2 . Тогда , очевидно , что все точки с абсциссами из отрезка $[1;2]$ обладают требуемым свойством , а точки , расположенные вне этого отрезка – нет . Отсюда ответ : множеством решений уравнения является отрезок $[1;2]$.

Пример. Решим уравнение $|x-1|-|x-2|=1$ с использованием геометрической интерпретации модуля .

Будем рассуждать аналогично предыдущему примеру , при этом получим , что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек , расположенных на координатной оси правее числа 2 . Следовательно решением данного уравнения будет являться не отрезок , заключённый между точками 1 и 2 , а луч , выходящий из точки 2 , и направленный в положительном направлении оси ОХ.

Ответ множеством решений уравнения является луч $[2;+\infty)$.

Обобщением вышеприведённых уравнений являются следующие равносильные переходы :

$$|x-a|+|x-b|=b-a, \text{ где } b \geq a \Rightarrow a \leq x \leq b$$

$$|x-a|-|x-b|=b-a, \text{ где } b \geq a \Rightarrow x \geq b$$

Решение нестандартных уравнений , содержащих модули.

Пример. Решим уравнение $3|x+2|+x^2+6x+2=0$

$$x \in [-2; +\infty)$$

$$3(x+2)+x^2+6x+2=0$$

$$3x+6+x^2+6x+2=0$$

$$x^2+9x+8=0$$

$$D=b^2-4ac=81-32=49$$

$$X_1=-8$$

$$-8 \notin [-2; +\infty)$$

$$x_2=-1$$

$$-1 \in [-2; +\infty)$$

$$(1) \quad x \in (-\infty; -2)$$

$$3 \cdot (-(x+2))+x^2+6x+2=0$$

$$3 \cdot (-2-x)+x^2+6x+2=0$$

$$x^2+6x+2-6-3x=0$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$D=b^2-4ac=9+16=25$$

$$x_1=1$$

$$1 \notin (-\infty; -2)$$

$$x_2=-4$$

$$-4 \in (-\infty; -2)$$

Ответ: $x_1=-4$; $x_2=-1$.

Литература

- Симонов А.Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математики. – М.: Просвещение, 1991.
- Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. – М.: ВЗМШ при МГУ, 1983.
- Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ. 11 кл. – М.: Просвещение, 1993.
- Галицкий М.Л. и др. Сборник задач по алгебре 8 – 9 кл. – М.: Просвещение, 1995.
- Говоров В.М. и др. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Просвещение, 1983.
- Горнштейн П.И. и др. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.
- Мерзляк А.Г. и др. Алгебраический тренажер. – М.: Илекса, 2001.
- Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл. – М.: Мнемозина, 2000.
- Никольская И.Л. Факультативный курс по математике. – М.: Просвещение, 1995.
- Олехник С.Н. и др. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10 – 11 кл. – М.: Дрофа, 1995.
- Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике 10 – 11 кл. – М.: Просвещение, 1989.

ИНТЕРНЕТ – РЕСУРСЫ

ПОИСКОВЫЕ СИСТЕМЫ:

www.yandex.ru
www.rambler.ru
www.google.ru
www.aport.ru
www.vahoo.com
www.altavista.com

ПОЧТОВЫЕ СЛУЖБЫ (Электронная почта):

www.mail.ru

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ:

www.obrazov.cap.ru – Министерство образования и молодежной политики ЧР;
p://gov.cap.ru/main.asp?govid=139 – Городское управление образованием;
www.school.edu.ru – Российский общеобразовательный портал;
www.chrio.cap.ru – Институт образования;
www.edu.ru – федеральный портал «Российское образование»;
www.ege.edu.ru – портал информационной поддержки ЕГЭ;
www.ege.ru – единый государственный экзамен.

ГОССТРУКТУРЫ:

АДМИНИСТРАЦИИ:

<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=9> – Администрация президента Чувашской Республики;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=81> – Администрация г. Чебоксары;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=102> – Администрация Ленинского района г. Чебоксары;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=258> – Администрация Московского района г. Чебоксары;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=96> – Администрация Калининского района г. Чебоксары;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=82> – Администрация г. Новочебоксарск;

МИНИСТЕРСТВА:

<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=17> – Кабинет Министров Чувашской Республики;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=12> – Министерство культуры ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=45> – Министерство внутренних дел ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=11> – Министерство здравоохранения ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=3> – Министерство информационной политики ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=13> – Министерство образования ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=18> – Министерство социальной политики ЧР;
<http://gov.cap.ru/main.asp?govid=20> – Министерство спорта ЧР.

АДРЕСА САЙТОВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ШКОЛЬНЫМ ПРЕДМЕТАМ:

<http://referat.ru> – рефераты по различным предметам;
<http://referat.myweb.ru> – рефераты по различным предметам;
<http://test.allbest.ru> – тесты по всем предметам;
<http://www.college.ru> – открытый мир знаний (математика, физика, астрономия, химия, биология, география);
<http://school.holm.ru> – сайт по школьным предметам;

**Электронные учебники, приобретенные в
готовом виде.**

	<i>Название электронного учебника</i>
1.	Математика 5-9. Дорофеев Г.В.
2.	Открытая математика. Планиметрия.
3.	Открытая математика. Стереометрия.
4.	1С. ЕГЭ.
5.	1С. Репетитор по математике.
6.	Алгебра 7 – 11
7.	Кирилл и Мефодий. Алгебра 7.
8.	Кирилл и Мефодий. Алгебра 8.
9.	Кирилл и Мефодий. Алгебра 9.
10	Кирилл и Мефодий. Алгебра 10.
11.	Кирилл и Мефодий. Алгебра 11.
12.	Кирилл и Мефодий. Геометрия 7.
13.	Кирилл и Мефодий. Геометрия 8
14.	Кирилл и Мефодий. Геометрия 9.
15.	Кирилл и Мефодий. Геометрия 10.
16.	Кирилл и Мефодий. Геометрия 11.

ОТЗЫВ
о методической разработке
учителя математики СОШ №61 УВЦ МЖК
Карпеевой Лидии Геннадьевны
элективного курса на тему: «Решение задач содержащих модуль».

Методическая разработка элективного курса на тему: «Решение задач содержащих модуль» посвящена актуальной теме, т.к. программой школьного курса математики не предусмотрены обобщения и систематизация знаний о модулях, их свойствах, полученных учащимися за весь период обучения. В связи с переходом на профильное обучение, возникла необходимость более глубокого изучения этой темы. Задачи связанные с абсолютными величинами, часто встречаются на математических олимпиадах, вступительных экзаменах вузы, ЕГЭ. Поэтому данная тема имеет большое практическое применение.

В проведение этого курса Лидия Геннадьевна использует различные методы активизации познавательной деятельности учащихся, а также различные формы организации их самостоятельной работы. В результате обучения по этому курсу её ученики успешно сдают ЕГЭ, показывают качество знаний от 50% до 85%.

Считаю что эта разработка будет полезна учителям математики в практической деятельности по подготовке выпускников к ЕГЭ.

14.12.2007



Заместитель директора
по УВР МОУ СОШ №61 УВЦ МЖК
Михеева Т. П.

Рецензия
на проект **Карпеевой Лидии Геннадьевны**
учителя математики СОШ № 61 УВЦ МЖК по теме
«Решение задач, содержащих модуль»

Карпеева Лидия Геннадьевна, учитель математики СОШ № 61 УВЦ МЖК, педагог первой квалификационной категории, постоянно изучает опыт передовых учителей математики, сама совершенствуется и разрабатывает методику работы со школьниками.

Рецензируемый проект является актуальным при обучении учащихся математике. Материал отобран руководствуясь основными методическими принципами: доступность; научность и актуальность.

Проект рассчитан на учащихся 9 – 11 классов и ставит своей целью научить школьников работать с функциями, закон задания которых не является постоянным, а зависит от промежутка, на котором рассматривается заданная функция. При этом кусочно-линейные функции являются относительно простыми в классе кусочных функций, что делает предлагаемый проект вполне реализуемым в классах со средней математической подготовкой, и в то же время обеспечивающим достаточный интерес со стороны тех школьников, которые имеют значительный интерес к математике. Программа проекта рассчитана на 34 часа, в том числе из них 7,5 часов лекций и 26,5 часов практических занятий. Отметим, что наличие лекций сближает данный проект с вузовской манерой изложения материала и помогает школьникам адаптироваться в дальнейшем к учебе в университет.

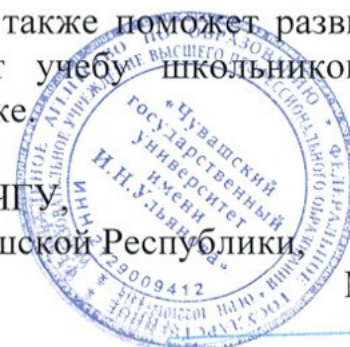
Характерной особенностью проекта является использование геометрической интерпретации модуля числа и его систематическое применение на практических занятиях. Основная часть проекта состоит из практических занятий, которая достаточно велика и даёт возможность учащимся основательно закрепить теорию и приобрести твердые навыки в обращении с кусочно-линейными функциями.

Проект свидетельствует о достаточно высоком уровне математической и методической подготовки её автора. Учебно-методическое обеспечение является современным и достаточным для полноценной работы школьников в аудитории и при выполнении домашних заданий.

Считаю, что программа данного проекта вполне может быть реализована в профильной школе и послужит успешному освоению школьниками всего курса математики, а также поможет развить интерес к математике как к науке и облегчит учебную работу школьников в вузах с повышенными требованиями по математике.

Декан математического факультета ЧГУ
заслуженный работник образования Чувашской Республики,
профессор

Мерлин А.В.



Подпись руки
заверяю

на утверждение деканата факультета
им. И.Н. Ульянова

17 12 17 г.