

ЕГЭ-16. Задача №12

Выполнение действий с функциями

Методическая разработка
выполнена Гащенко В.А., учителем математики
МОУ «Гимназия №1» г.Печора, Республика Коми

Задача №1

Поиск наибольшего
или наименьшего
значения функции на
отрезке



Стандартный алгоритм

- Ищем производную данной функции.
- Находим стационарные и критические точки.
- Отбираем среди них те, которые принадлежат данному отрезку.
- Вычисляем значение функции на концах отрезка и в этих точках.
- Сравнивая результаты, делаем выводы и даём ответ.

Пример №1. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение.

1. Находим производную функции. $y' = 3x^2 - 12x + 9$.
2. Стационарные точки: решаем уравнение $y' = 0$.
 $3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad x_1 = 1; x_2 = 3$.
3. $1 \in [0; 3]; 3 \in [0; 3]$.
4. Находим значения функции на концах отрезка и в точке $x=1$. $y(1) = 9; y(3) = 5; y(0) = 5$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = y(1) = 9$.

Усложняем ситуацию

Стационарных точек две: -6 и -4.

Данному отрезку принадлежит только -4.

Начинаем считать:

$$y(-5)=9$$

rrrr

$$Y(-4)=7$$

$$Y(5)=968+11... \text{ считать не будем}$$

Ответ: 7

Усложняем ситуацию

Пример №3. Найти наибольшее значение функции

$$y = (x^2 - 10x + 10)e^{10-x}$$

$[5; 11]$.

на отрезке



Следует взять производную произведения, учитывая, что второй множитель сложная функция!



$$y'(x) = (2x - 10)e^{10-x} - e^{10-x}(x^2 - 10x + 10)$$

$$y'(x) = e^{10-x}(12x - x^2 - 20)$$

Стационарные точки $x=10$; $x=2$. Нас устраивает точка 10.

$$y(5) = -15e^5; y(10) = 10; y(11) = 21e^{-1}$$

Ответ: 10

Усложняем ситуацию

ПримерN°4. Найти наименьшее значение функции

$$y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$$

Конечно, можно по алгоритму, но это скучно...

Заметим, что здесь не указан отрезок, да ещё нужна область определения функции... Хорошо, что под знаком логарифма в этом случае всегда положительное число!

ПримерN°4. Найти наименьшее значение функции
 $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$

Заметим, что заданная функция возрастает ($3 > 1$)

Следовательно, своего наименьшего значения она достигнет при наименьшем значении под логарифмического выражения.

А это- квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 10$

Его наименьшее значение равно 1

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = 3.$$

при

Ответ: 2

Пример №5. Найти наибольшее значение функции

$$y = 3^{-7-6x-x^2}$$

Ситуация аналогичная предыдущей, не берём производную, **рассуждаем...**

Функция вида $y = 3^t$ возрастает на \mathbb{R} , поэтому своего наибольшего значения она достигнет при наибольшем значении показателя $-7 - 6x - x^2$.

Квадратный трёхчлен $-7 - 6x - x^2$

**своего наибольшего значения 2 достигает
при $x = -3$.**

Ответ: 9

Задача №2

Нахождение точек
максимума или
минимума
функции.



Стандартный алгоритм

**И, конечно, никогда не
забываем находить
область определения
функции!**

на получившихся промежутках.

➤ Делаем выводы о монотонности
функции и точках максимума и
минимума.

Помним!

Функция	Производная
$f(x) \nearrow$	$f'(x) > 0$
$f(x) \searrow$	$f'(x) < 0$
x_0 — точка экстремума $f(x)$	$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ или не сущ.



Помним!

**Точки экстремума-
это**

**«иксовые»
значения!**

**Экстремумы- это
«игрековые»
значения!**

ПримерN°5. Найти точку минимума функции

$$y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3.$$

1. $D(y) = (0; +\infty)$

2. Находим производную. $y^I(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x}$

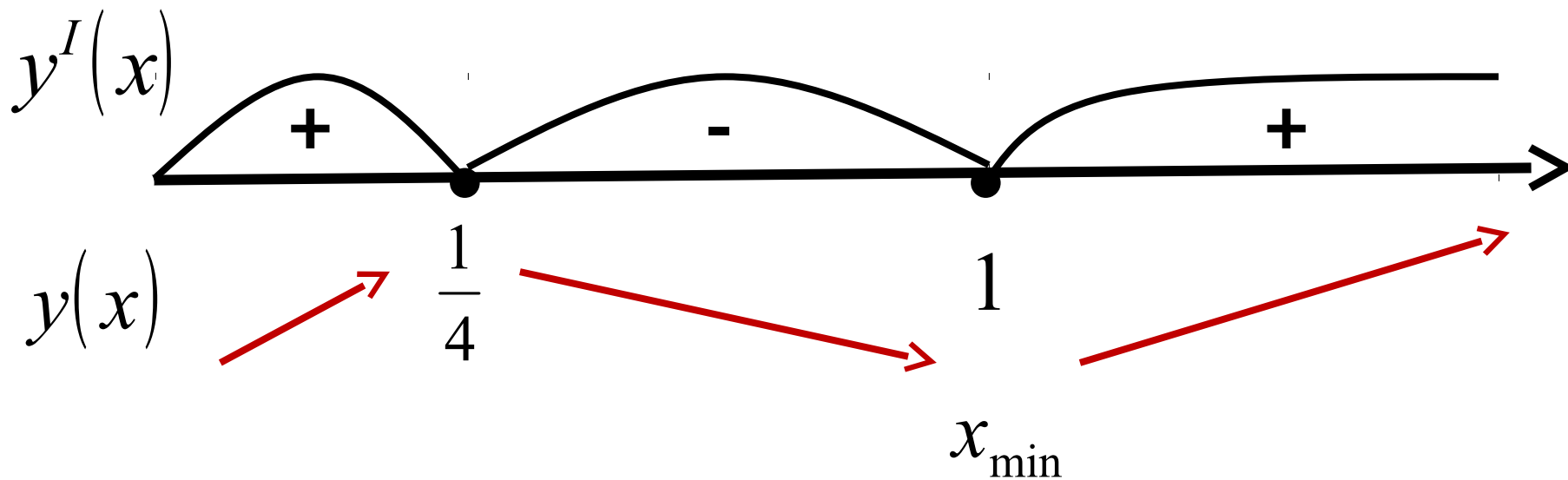
Преобразуем производную. $y^I(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x}$

3. Находим стационарные точки.

$$y^I = 0 \quad \text{при} \quad x = 1; x = \frac{1}{4}.$$

4. Критических точек нет.

5.



Ответ: 1.

Пример №6. Найти точку максимума функции

$$y = (2x - 3) \cos x - 2 \sin x + 5$$

на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

1. Находим производную и упрощаем её:

$$y' = 2 \cos x + (2x - 3)(-\sin x) - 2 \cos x$$

$$y' = -(2x - 3) \sin x$$

2. Стационарные точки:

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

$$x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin x$

$$2x - 3 = 0$$

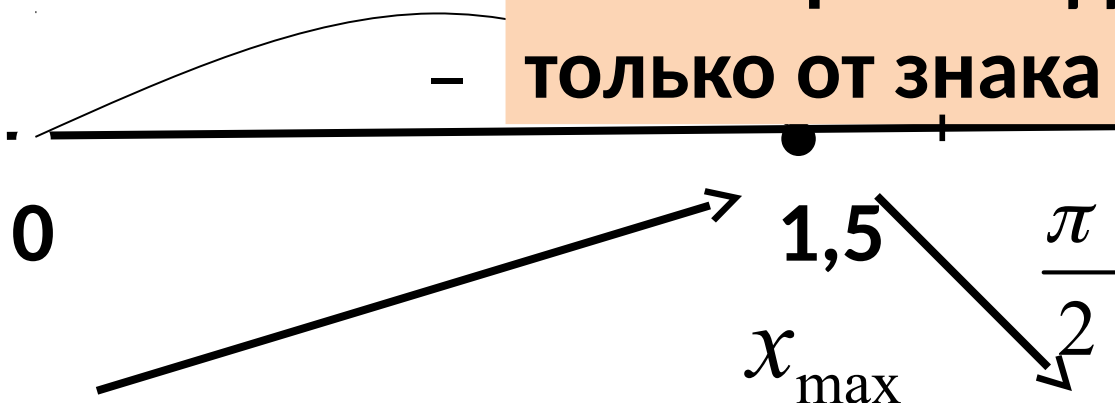
$$x = 1,5$$

$$1,5 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

или

3.

на заданном промежутке положителен, знаки производной зависят только от знака $2x-3$.



Ответ: 1,5

An open notebook with a green cover and a yellow pencil. The notebook is open to a page with a light blue grid pattern. The text is written in black and red ink. A green highlighter is visible in the bottom left corner.

Помни!

**Чему бы ты не
учился, ты
учишься для
себя.**

Гай Петроний Арбитр

Используемые ресурсы:

1. www.fipi.ru
«Открытый банк заданий ЕГЭ».
2. «Алгебра и начала анализа 10-11 классы» / А.Г. Мордкович-М: Мнемозина, 2014.