Решение уравнений Максвелла лучше начать на примере однородной среды, когда все электрические характеристики будут постоянными. При этом наиболее кратко будут даны определения скин-слоя, волнового числа в сплошной среде и импеданс. А также установлены пространственные характеристики электромагнитной волны в свободном пространстве и в импедансной среде. Какие электрические характеристики необходимы при зондирование различных сред, рассказано в статье "**ИМПЕДАНС И ДРУГИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ЗОНДИРОВАНИЕ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ СРЕДЫ**" в открытом сайте file:///D:/dowlander/28.pdf, ссылаться на которую будем как ЧАСТЬ I. О самих уравнениях Максвелла рассказано в статье "**УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА**" в открытом сайте file:///C:/Users/snow/AppData/Local/Temp/Tmp_view/10752.pdf, ссылаться на которую будем как ЧАСТЬ II.

ЧАСТЬ III

УДК 538.566

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В.К. Балханов

Институт физического материаловедения СО РАН,

670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, д.6, E-mail: ballar@yandex.ru

Аннотация.

Из второй части мы знаем, что периодическое во времени решение уравнений Максвелла зависят от времени как $\exp(-i\omega\, t)$. Как зависят поля в пространстве, можно узнать, только решая уравнения Максвелла. Для этого удобно сначала считать электрические параметры постоянными, не зависящие от своего местоположения. Среды, у которых электрические характеристики постоянные, называются однородными. Естественно уравнения Максвелла начать решать для однородных сред. При этом мы введем важные величины, такие как приведенный поверхностный импеданс (иначе, просто импеданс), скин – слой и кажущееся сопротивление. И установим компоненты электромагнитной волны в воздухе и в импедансной среде.

Ключевые слова: однородная среда, импеданс, скин-слой, кажущееся сопротивление.

Abstract.

From the second part we know that the periodic time-solving of Maxwell's equations depends on time as $\exp(-i\omega\, t)$. How the fields depend in space can only be learned by solving Maxwell's equations. To do this, it is convenient to first consider the electrical parameters permanent, independent of their location. Medias with constant electrical characteristics are called homogeneous media. Naturally, Maxwell's equations begin to solve for homogeneous media. At the same time, we will introduce important values, such as the given superficial impedance (otherwise, just impedance), skin - layer and seeming resistance. And we will install components of the electromagnetic wave in the air and in the improvised media.

Key words: homogeneous media, impedance, skin-layer, seeming resistance.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Приведенный поверхностный импеданс

Атмосфера земли буквально пронизана электромагнитными полями различной природы и различной частоты. Важность понятия частоты следует из экспериментального факта, что электромагнитные волны в вакууме независимо от частоты распространяются с одинаковой и максимальной в природе скоростью – скоростью света, равной

$$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Измерение электромагнитных волн, их прием, производится специальной аппаратурой, неотъемлемым атрибутом которых является электрическая антенна, реагирующая на электрическое поле, и магнитный датчик для измерения магнитного поля. Некоторые приборы могут непосредственно измерять импеданс, их так и называют: *измеритель поверхностного импеданса* (ИПИ-1000); число указывает частотный диапазон в кГц.

Электромагнитные поля всегда имеют некоторый источник своего излучения, характеристики которой зачастую неизвестны. Даже если известно, что та или иная волна излучается определенной радиостанцией, то на параметры волны в месте ее приема сильное влияние оказывает наличие самой земли. Рельеф местности, распределение электрических параметров, все это влияет на то, какую волну мы получаем в месте приема. Но в 1950 г. академик А.Н. Тихонов указал, что если приемную аппаратуру настроить на то, чтобы она измеряла не сами компоненты электромагнитного поля, а их отношение, то параметры источника сократятся. Получаемую при этом величину отношения электрического поля к магнитному полю назвали поверхностным импедансом, и обозначили символом δ [Часть I; Бердник С.Л. и др. Использование концепции поверхностного импеданса в задачах электродинамики (75 лет спустя), Радиофизика и радиоастрономия, 2014, Т. 19, № 1, с. 57–80]:

$$\delta = \frac{1}{c}\frac{E}{B}. \tag{1.1}$$

Скорость света введена для того, чтобы величина импеданса была безразмерной.

Уравнения Максвелла (в дальнейшем УМ) линейные, поэтому их решение можно искать в комплексном виде; так, временную зависимость сразу ищем в виде $\vec{E}$, $\vec{B} \sim e^{-i\omega t}$. Это означает, что импеданс является комплексной величиной. Его пишут в двух видах:

либо как $\delta = |\delta| \exp(\varphi_\delta)$, где $|\delta|$ - модуль и φ_δ - фаза импеданса;

либо как $\delta = \operatorname{Re}\delta + i\operatorname{Im}\delta$, где $\operatorname{Re}\delta$ - действительная и $\operatorname{Im}\delta$ - мнимая части импеданса.

Хотя будем считать, что читатель с электромагнитной волной знаком еще из школьных учебников, но все же дадим небольшое напоминание. На рис. 1.1 дана картина распределения электрического и магнитного полей в свободном пространстве. Из рисунка видно, когда электрическое поле достигает max, магнитное поле обращается в нуль, и наоборот. Но это только для волны в свободном пространстве. Если волна находится вблизи поверхности сплошной среды или вообще в ней, сдвиг max и min электрического поля относительно магнитного может быть любым. Об этот как раз и говорит наличие импеданса δ. Оказывается, чтобы говорить об электромагнитной волне как таковой, импеданс должен быть заметно меньше единицы. Расстояние между двумя max называется длиной волны λ. Если max электрического поля сдвинуть на четверть длины волны, то попадем на max магнитного поля. Говорят, что между этими полями имеется сдвиг фаз, равный $360^0/4 = 90^0$.

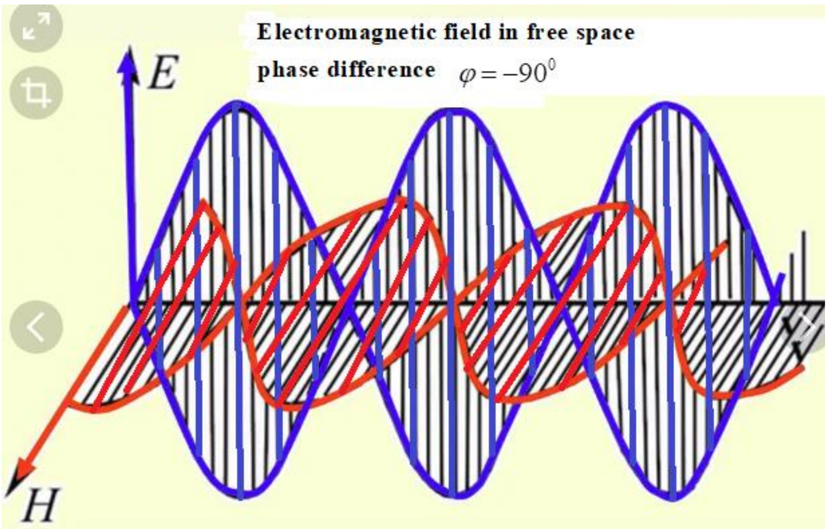

Рис. 1.1. Электрические и магнитные поля сдвинуты на четверть периода.

Вместо индукции *B* часто используют магнитное поле, обозначаемое как *H*. Поскольку $B = \mu_0 H$ и $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, то (1.1) перепишется в следующем виде:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E}{H}. \tag{1.2}$$

Поскольку $\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376.73$ Ом, а размерность E/H = В/А = Ом, то δ снова безразмерно.

Понятие импеданса было введено в электродинамику О. Хевисайдом (O. Heaviside) и О. Лоджем (O. Lodge). Введение импеданса можно проследить из электротехники, как это сделал еще в 1938 г. S.A. Schelkunoff [Schelkunoff S.A. Electromagnetic fields. Blaisdell Publishing Company, 1963. 411 p.], и как подробно рассказано в Фейнмановских лекциях по физике. В этих лекциях импедансом называют комплексное сопротивление *Z*, являющееся коэффициентом пропорциональности между напряжением в цепи *U* и током *J*: *U* = *Z J*. Напряжение создается электрическим полем *E* на участке длиной *L*, так что импеданс (иначе комплексное сопротивление цепи) *Z* = *U* / *J* = *EL* / *J*. Но величина *J* / *L* является током на единицу длину и определяет напряженность магнитного поля *H*, т.е. *Z* = *E* / *H*. Введя размерный множитель $\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376.73$ Ом с размерностью сопротивления, приходим к приведенному поверхностному импедансу, даваемому соотношением (1.2). В том же 1938 году специально для электромагнитных волн поверхностный импеданс ввел

М.А. Леонтович. При этом выясняется, что для электромагнитных волн модуль импеданса $|\delta|$ оказывается заметно меньше единицы. Для практических целей численные расчеты показывают (сошлюсь на статью [Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Ангархаева Л.Х. Поверхностный импеданс сильно индуктивной двухслойной среды // ЖТФ, 2018, № 3. С. 450-454. DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45606.2338]), что достаточно считать

$$|\delta| < 0.3. \tag{1.3}$$

Только в этом случае можно говорить о электромагнитных полях как о волнах, переменных в пространстве и во времени. Например, вблизи излучателя антенна представляет собой статичный электрический диполь. Тогда магнитное поле обращается в нуль, и импеданс (1.1) расходится, т.е. обращается в бесконечность. Однако в действительности электромагнитные волны всегда можно измерить вблизи излучателя, только они будут иметь причудливую пространственную характеристику (зависимость поля от расстояния от излучателя). И при этом будет выполнятся условие Леонтовича (1.3). В литературе вообще принято считать δ << 1. Это позволяет существенно упростить как вычисления, так и запись формул.

Расскажем немножко о том, как работает прибор типа ИПИ. У него магнитная рамка, измеряющая магнитное поле, ориентирована на максимум приема сигнала. Эта ориентация принята за ось *y*. Направление от радиостанции (transmitter) к приемной антенне (receiver) взята за ось *x*. Тогда в цилиндрической системе координат в плоскости *xy* расположены радиальная координата *r* и аксиальный угол φ. Ось *z* соответственно ориентирована ортогонально этой плоскости, она одна и та же для декартовой и цилиндрической систем координат. В этой системе координат импеданс определится следующим выражением:

$$\delta = -\frac{1}{c}\left(\frac{E_x}{B_y}\right)_{z=0}. \tag{1.4}$$

Знак минус связан с выбором ориентации оси *z*. Если бы ось *z* была ориентирована в глубь земли, то в определение импеданса (1.4) надо было бы поменять знак. Только при этом действительная часть импеданса будет положительной величиной. В заключении укажем, что приборы типа ИПИ-1000, измеряющие поверхностный импеданс, устроены так, что они показывают значение $\cos\varphi_\delta$, и поэтому не зависят от знака фазы импеданса φ_δ.

В сферической системе декартовые координаты остаются теми же самыми. Только добавляется полярный угол θ, отсчитываемый от оси *z* (рис. 1.2).

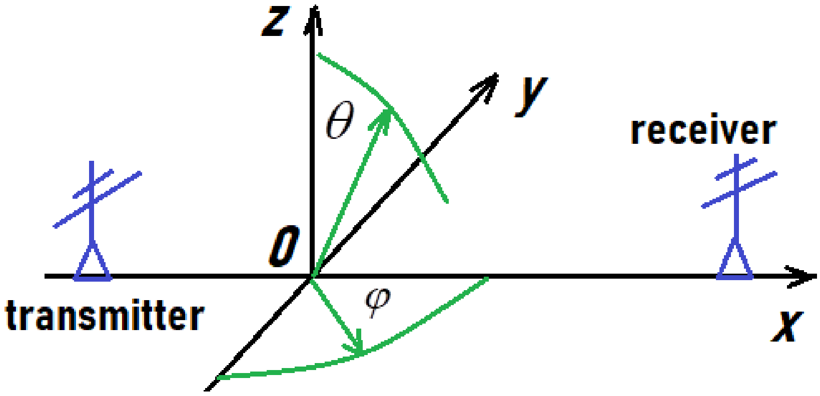

Рис. 1.2. Прибор ИПИ расположен в т. *0*.

§ 2. Вектор индукции магнитного поля вблизи поверхности Земли

Источником электромагнитного излучения обычно является вертикальный металлический стержень, по который подается переменный электрический ток. Такая антенна излучает вертикально поляризованную электрическую компоненту электромагнитного поля.

Непосредственно в приповерхностном слое земли под влиянием внешних электромагнитных полей заряды, слагающие сплошную среду, находятся в вечном движении. Об этом говорят, что на поверхности земли текут магнитотеллурические токи. Их наличие для задач геофизики проявляется двояко. Во-первых, они препятствуют проникновению создающих их полей вглубь земли. Во-вторых, магнитное поле вблизи поверхности может иметь только одну горизонтальную компоненту. Последнее означает, что если декартовы координаты ориентированы так, что оси x, y лежат на поверхности, ось z направлена по нормали от поверхности в свободное пространство, и распространение поля происходит вдоль оси x, то вектор $\vec{B}$ имеет только одну ненулевую компоненту $B_y(x,z)$:

$$\vec{B} = \left(0, B_y(x,z), 0\right). \tag{2.1}$$

Таким образом, вблизи земной поверхности вектор индукции магнитного поля имеет простую структуру – только одну ненулевую компоненту. Эти самым мы определили прямоугольную декартову систему координат, причем ось z направили вверх, в свободное пространство.

Здесь самое время повториться. Источником излучения электромагнитных волн зачастую является вертикальная электрическая антенна. Тем более, А. Зоммерфельд доказал (как сказано в книге [Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. - М.: Наука, 1991]), что “**с возрастанием расстояния от антенны излучение становится все более сходным с излучением вертикальной антенны**”. Кто имел дело с карманным транзисторным приемником, тот знает, что оптимальный прием радиостанции происходит только при одной горизонтальной ориентации магнитной антенны в виде ферритового стержня. Таким образом, теория и опыт показывают, что вдали от излучателя вблизи земной поверхности магнитная индукция (в цилиндрической системе координат) имеет только одну ненулевую горизонтальную компоненту, т.е.

$$\vec{B} = \left(B_r = 0;\ \ B_\varphi;\ \ B_z = 0\right). \tag{2.2}$$

Если в декартовой системе координат радиус-вектор $\vec{r}$ имеет компоненты $(x;\ y;\ z)$, то в цилиндрической системе координат будет $(r;\ \varphi;\ z)$. Далее напомним, в цилиндрической системе координат операция rot ($\nabla\times$) выглядит так (см. Приложение в книге Ландау и Лифшица, Электродинамика сплошных сред):

$$\left(\nabla\times\vec{B}\right)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z};$$

$$\left(\nabla\times\vec{B}\right)_\varphi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r};$$

$$\left(\nabla\times\vec{B}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}.$$

С учетом (2.2) находим

$$\left(\nabla\times\vec{B}\right)_r = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z};\ \left(\nabla\times\vec{B}\right)_\varphi = 0;\ \left(\nabla\times\vec{B}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right). \qquad (2.3)$$

Вектор ***E*** найдем из следующего уравнения Максвелла (Часть II. 5.2.d):

$$c^2\ \nabla\times\vec{B} = \left(-i\ \varepsilon\ \omega + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\vec{E}.$$

Из него и (2.3) следует, что вектор ***E*** имеет следующие компоненты:

$$\left(E_r;\ \ E_\varphi = 0;\ \ E_z\right). \qquad (2.4)$$

В декартовой системе координат, очевидно, будет

$$\vec{E} = \left(E_x(x,z), 0, E_z(x,z)\right). \qquad (2.5)$$

Теперь из уравнения (Часть II. 6.2.d) $\nabla\times\vec{B} = \frac{-i\ k^2}{\omega}\vec{E}$ находим компоненты электрического поля:

$$E_x = -\frac{i\omega}{k^2}\frac{\partial\ B_y}{\partial\ z},\ \ E_y = 0,\ \ E_z = -\frac{i\omega}{k^2}\frac{\partial\ B_y}{\partial\ x}. \qquad (2.6)$$

Мы попутно ввели важную величину: квадрат волнового числа

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon + i\ \mu_0\ \omega\ \sigma,$$

или

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon + \frac{i\ \mu_0\ \omega}{\rho}.} \qquad (2.7)$$

Напомним, если диэлектрическая проницаемость и удельное сопротивление таковы, что в некотором частотном диапазоне преобладает первое слагаемое, то такая среда называется ***емкостной***. Если преобладает второе слагаемое, то в этом частотном диапазоне среда будет ***индуктивной***. В общем случае среда будет ***импедансной***.

Перепишем (2.7) в следующем виде (с учетом того, что $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(1 + \frac{i}{\varepsilon_0\varepsilon\omega\rho}\right).$$

Отсюда видно, что граничная частота, разграничивающая емкостную и индуктивную среды, задается величиной $\varepsilon_0\varepsilon\omega\rho$. Если она больше единицы, то среда емкостная, если меньше – то индуктивная. Определение таких сред сводится просто к вопросу, какое слагаемое в определение (2.7) можно оставить.

При нашем выборе ориентации декартовой системе координат из одного из уравнения Максвелла $\nabla\times\vec{E} = i\omega\ \vec{B}$, если $\vec{B} = \left(0, B_y, 0\right)$, следует

$$i\omega\ B_x = 0,\ i\omega\ B_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\ i\omega\ B_z = 0.$$

Отсюда $\vec{E} = \left(E_x(x,z);\ \ E_y = 0;\ \ E_z(x,z)\right)$. Таким образом, в декартовой и цилиндрической системах координат векторы электромагнитных полей имеют одинаковое количество ненулевых компонент.

§ 3. Однородная среда

Уравнения Максвелла являются уравнениями для 6 векторов – трех векторов электрического поля и трех векторов магнитной индукции. Естественным будет желание получить уравнение только для одной какой-либо величины. Из того, что вблизи земной поверхности вектор $\vec{B} = \left(B_x = 0;\ B_y;\ B_z = 0\right)$ следует, что в качестве этой величины надо взять $B_y(x, z)$. Чтобы получить уравнение для нее, возьмем rot от (Часть II. 6.2.d). Используя математическое правило для оператора набла:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B},$$

и остальные уравнения Максвелла, найдем

$$\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0. \tag{3.1}$$

Это известное **волновое уравнение или уравнение Гельмгольца**. В декартовой системе координат, учитывая, что вектор $\vec{B}$ имеет только одну ненулевую компоненту B_y, зависящую от x и z, получаем

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + k^2 B_y = 0. \tag{3.2}$$

Подобные уравнения обычно решаются методом разделения переменных. Конкретно, для уравнения (3.2) этот метод дает следующее решение:

$$B_y = e^{i\lambda x}\left[C_1 \exp\left(+i\sqrt{k^2 - \lambda^2}\ z\right) + C_2 \exp\left(-i\sqrt{k^2 - \lambda^2}\ z\right)\right], \tag{3.3}$$

где C_1, C_2, λ - постоянные.

Часто сразу приводят решение, говоря при этом, что его правильность проверяется простой подстановкой в исходное уравнение.

Наличие двух слагаемых в решении (3.3) означает, что в общем случае в среде распространяются прямая и обратная волны. Говорят, что среда обладает отражательными свойствами. Если по условию задачи есть только падающая волна, то одно из двух слагаемых в (3.3) нужно отбросить (постоянную C_1 или C_2 необходимо положить равным нулю).

Для будущего полезно решить задачу. *Определить коэффициенты отражения и прохождения волны от границы двух сред, имеющих волновые числа* k_1 *и* k_2.

Имеем в первой среде падающую волну $\exp(ik_1 x)$ вдоль оси x. На границе $x = 0$ часть ее отражается обратно, в первую среду, а другая часть проникает во вторую среду, где продолжает движение как $\exp(ik_2 x)$. Таким образом,

$$B_1 = e^{i k_1 x} + V e^{-i k_1 x}, \quad B_2 = D\, e^{i k_2 x}.$$

На границе раздела должны быть равны как сами поля, так и их потоки, т.е.

$$\text{при} \quad x = 0 \text{ должно быть} \quad B_1 = B_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{\partial B_2}{\partial x}.$$

Оттуда $1 + V = D$, $k_1(1 - V) = k_2 D$. Решая эти два уравнения, находим коэффициенты отражения V и прохождения D:

$$V = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad D = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

§ 4. Поверхностный импеданс однородной среды

Вычисление поверхностного импеданса, когда подстилающая среда считается однородной, является важным примером решения уравнений Максвелла. Для воздушной среды примем $\varepsilon = 1$ и $\sigma = 0$ (фактически $\varepsilon = 1.0004$ и $\sigma = 10^{-12}$ См/м), величины, относящиеся к ней, мы будем снабжать маркером “0”, так квадрат волнового числа для свободного пространства будет $k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$. Это полезное соотношение. Оно позволяет, где это удобно, вместо круговой частоты ω использовать комбинацию ck_0.

Для проведения систематических, долговременных измерений импеданса необходима регулярно приходящая в пункт измерения электромагнитная волна. Вблизи поверхности Земли, вдалеке от излучателя, электромагнитные волны являются плоскими, причем из магнитных составляющих эти волны содержат только одну горизонтальную, параллельную поверхности земли, компоненту, ортогональную своему направлению распространения. Для идеально проводящих сред фронт волны ортогонален земле. Однако удельное сопротивление среды всегда имеет вполне конечное значение, поэтому фронт волны немножко наклонен вперед по ходу своего распространения. Это означает, что волна имеет электрическую компоненту вдоль своего луча. **Измерение этой части волны как раз и позволяет судить о геоэлектрической среде.** Рассматриваемая ситуация показана на рис. 4.1 для случая равным нулю проводимости и другого случая отличным его от нуля.

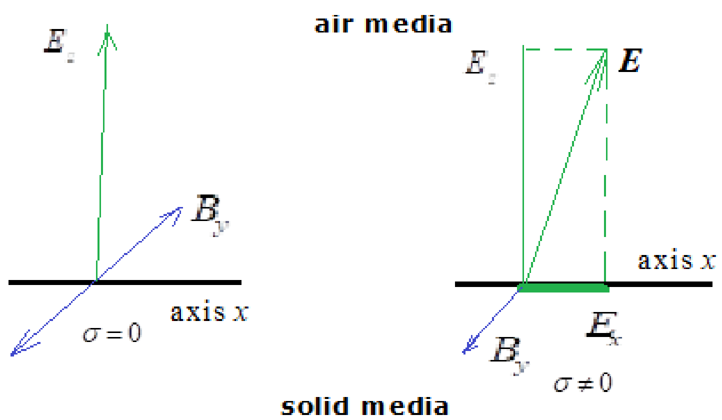

Рис. 4.1. Если среда обладает конечной проводимостью, то электрическое поле имеет горизонтальную компоненту E_x.

Итак, мы рассматриваем только проникающую из свободного пространства (воздушной среды) в земную поверхность электромагнитное поле. Для такой волны магнитная индукция (индексом 0 отмечаем величины в свободном пространстве):

$$\text{в воздухе} \quad B_{0y} = K \exp\left(i\chi_0\, x - i\sqrt{k_0^2 - \chi_0^2}\; z \right), \tag{4.1.a}$$

$$\text{в среде} \quad B_y = M \exp\left(i\chi\, x - i\sqrt{k^2 - \chi^2}\; z \right), \tag{4.1.b}$$

Этими соотношениями мы решили уравнения Максвелла, так что все последующие вычисления только алгебраические. Математически величины χ_0 и χ являются параметрами разделения переменных x и z волнового уравнения. Обратим внимание, решение (4.1.a) означает, что в свободном пространстве имеем только падающую волну. Из уравнения (2.6) $E_x = -\dfrac{i\omega}{k^2}\dfrac{\partial B_y}{\partial z}$ для E_x находим

$$E_{0x} = -\frac{\omega}{k_0^2}\sqrt{k_0^2 - \chi_0^2}\; B_{0y}, \quad E_x = -\frac{\omega}{k^2}\sqrt{k^2 - \chi^2}\; B_y. \qquad (4.2)$$

Горизонтальные компоненты любого вектора, в частности и компоненты электромагнитных полей, пересекают границу непрерывным образом (об этом подробно рассказано в Части II § 4). Поэтому граничные условия для компонент полей при $z = 0$ будут иметь следующий вид:

$$E_{0x} = E_x, \quad B_{0y} = B_y.$$

Подставляя сюда (4.1) и (4.2), получаем

$$K \exp(i\chi_0\, x) = M \exp(i\chi\, x), \qquad (4.3.a)$$

$$\frac{\sqrt{k_0^2 - \chi_0^2}}{k_0^2} = \frac{\sqrt{k^2 - \chi^2}}{k^2}. \qquad (4.3.b)$$

Результат (4.3.a) интересен тем, что на первый взгляд он зависит от *x*, а этого не должно быть. Однако, если положить $\chi_0 = \chi$, то экспоненты в обеих частях (4.3.a) сократятся и зависимость от *x* исчезнет. Таким образом, выясняется, что параметр χ во всех средах – воздушной и сплошной – оказывается неизменным. Попутно мы получаем, что *K* = *M*. Из одного граничного условия $E_{0x} = E_x$ нам удалось получить два следствия. По аналогичному случаю замечательный американский физик Ричард Фейнман говорил, что к строгим математическим формулам всегда надо прилагать физическое мышление.

Из (4.3.b) теперь находим параметр χ:

$$\chi = \frac{k_0 k}{\sqrt{k_0^2 + k^2}}. \qquad (4.4)$$

Это соотношение в книгах по радиофизике часто записывают также в виде $\dfrac{1}{\chi^2} = \dfrac{1}{k_0^2} + \dfrac{1}{k^2}$ (в таком виде формула (4.4) легче запоминается). Теперь можно найти импеданс, при этом, в силу граничных условий, не важно, в какой среде брать компоненты полей. Это легко понять и с физической точки зрения. Если мы принимаем, что волна проникает в земную среду, то естественно считать, что компоненты полей как над поверхностью, так и сразу за нею в среде, одинаковы. Итак,

$$\delta = -\frac{1}{c}\left(\frac{E_x}{B_y}\right)_{z=0} = \frac{\omega}{c\,k_0^2}\sqrt{k_0^2 - \chi^2}.$$

Подставляя сюда (4.4), после несложных алгебраических действий, окончательно находим:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (k/k_0)^2}} = \left\{1 + \varepsilon + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega \rho}\right\}^{-1/2}. \qquad (4.5)$$

Объединяя (4.4) и (4.5), получим полезное соотношение $\chi = k\delta$. Параметр разделения переменных в волновом уравнении оказывается равным волновому числу в сплошной среде, умноженному на импеданс среды.

В силу того, что электрические и магнитные компоненты электромагнитного поля отстают друг от друга по фазе, импеданс оказался комплексной величиной. Запишем его в виде $\delta = |\delta| e^{i\varphi_\delta}$, где модуль $|\delta|$ и фаза φ_δ - действительные величины. Приборы измерителя поверхностного импеданса (типа ИПИ-1000) как раз измеряют модуль $|\delta|$ и фазу φ_δ импеданса. Чтобы найти модуль и фазу импеданса, перепишем (4.5) в следующем виде:

$$|\delta|^2 e^{-2i\varphi_\delta} = 1 + \varepsilon + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega\rho}.$$

Здесь, напомним, $\exp(-2i\varphi) = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi$. Так что, разделяя действительные и мнимые части, получим два уравнения. Решая их, находим:

модуль импеданса $$|\delta| = \left\{(1+\varepsilon)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_0\omega\rho}\right)^2\right\}^{-1/4}, \qquad (4.6.a)$$

фаза импеданса $$\varphi_\delta = -\frac{1}{2} arctg \frac{1}{(1+\varepsilon)\varepsilon_0\omega\rho}. \qquad (4.6.b)$$

Отметим, что из-за наличия 1 в фигурных скобках в (9.6.а) выражение в них всегда больше 1. А наличие отрицательной степени -1/4 означает, что при любых значениях удельного сопротивления и диэлектрической проницаемости модуль импеданса

всегда $|\delta| < 1$.

Оглядывая полученные формулы, замечаем, что импеданс зачастую зависит от одного безразмерного параметра – произведения $\varepsilon_0\omega\rho$. Оценим его для среды с удельным сопротивлением $\rho = 150$ Ом·м (взято типичное значение для байкальской воды) Так, на частоте 50 кГц:

$$8.85\cdot 10^{-12}\cdot 2\pi\cdot 50000\cdot 150 = 4\cdot 10^{-4} << 1.$$

Оказывается, для многих практически важных задач геофизики и электроразведки данный параметр почти всегда много меньше единицы:

$$\varepsilon_0\omega\rho << 1. \qquad (4.7)$$

Малость этого безразмерного параметра позволяет значительно упрощать как сами вычисления, так и получаемые формулы. Так, для однородной среды, в первом неисчезающем пределе по малому параметру $\varepsilon_0\omega\rho$, для импеданса из (4.5) получаем:

$$\delta = \sqrt{-i\varepsilon_0\omega\rho}, \qquad (4.8)$$

и для его модуля и фазы (напомним, $\sqrt{-i} = \exp(-i\pi/4)$):

$$|\delta| = \sqrt{\varepsilon_0\omega\rho}, \quad \varphi_\delta = -\frac{\pi}{4} = -45^0. \qquad (4.9)$$

В таком виде обычно и записывают импеданс для однородной проводящей среды.

Для однородной проводящей среды квадрат волнового числа (2.7) будем $k^2 = i\mu_0\omega\sigma$, или

$$k = \sqrt{i\mu_0\omega\sigma} = (1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\rho}}. \qquad (4.10)$$

Приближение (4.7) будем называть условием квазистационарности или условием проводящей среды. Заменяя ρ на $|\delta|^2/\varepsilon_0\omega$, как это видно из (4.9), получим волновое число в виде:

$$k = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{c|\delta|}. \tag{4.11}$$

В это выражение помимо частоты входит непосредственно измеримая величина – импеданс. Этим самым начали выполнять большую программу – стараться все величины выразить с помощью импеданса.

В заключении укажем, что приборы типа ИПИ-1000, измеряющие поверхностный импеданс, устроены так, что они показывают значение $\cos\varphi_\delta$, и поэтому не зависят от знака фазы.

§ 5. Скин-слой

Рассмотрим, как меняются поля по мере проникновения вглубь земной среды. Для этого в выражение $B_y = \exp\left(-i\sqrt{k^2-\chi^2}\, z\right)$, где опущены множители K и $\exp(i\chi x)$, как не вносящие вклада в импеданс в случае проводящей среды, подставляем (4.4): $B_y = \exp\left(-i\dfrac{k^2}{\sqrt{k_0^2+k^2}}z\right)$. С учетом приближения (4.7) и следующего из него результата (4.10) $k=(1+i)\sqrt{\dfrac{\mu_0\omega}{2\rho}}$, получаем

$$B_y = \exp(-ik\, z) = \exp\left[(1-i)\frac{z}{H_s}\right], \tag{5.1}$$

где ввели

$$H_s = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}. \tag{5.2}$$

При нашей ориентации координат значения z в среде отрицательны. Поэтому амплитуда $|B_y| = \exp(-|z|/H_s)$ с увеличением глубины экспоненциально убывает, а это означает быстрое затухание поля (индекс s означает skin). Величина H_s как раз определяет характерное расстояние, на котором поле заметно (экспоненциально) ослабляется. Его называют глубиной скин - слоя (или скиновая глубина). Оценим его для озера Байкал, у которого удельное сопротивление воды (при нулевой температуре по Цельсию) $\rho = 150$ Ом·м. На частоте 50 кГц из (5.2) легко вычисляем:

$$H_s = \sqrt{2\cdot 150/4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2\pi\cdot 50000} = 28 \text{ м.}$$

Результат означает, что электромагнитная волна с частотой 50 кГц проникает в байкальскую воду (в зимний период) на глубину в несколько десятков метров. Если использовать частоту 10 Гц, то найдем $H_s = 2$ км, т.е. такая волна проникает практически на всю глубину (для озера Байкал ее максимальная глубина примерно 1.7 км). Чтобы зондировать дно на середине оз. Байкал, надо использовать электромагнитные волны с частотой меньше десятков Гц.

Фактически, волны с частотой десятков кГц используют на оз. Байкал в двух случаях. Либо при измерениях в прибрежной зоне, чтобы прощупать дно. Либо на середине оз. Байкал при калибровке приборов. Ведь на таких частотах середина *озеро Байкал является идеальной природной однородной проводящей средой*.

Формулу (5.2) можно переписать в другом виде. Для проводящей среды вспомним, что, согласно (4.9), модуль импеданса есть

$$\left|\delta\right| = \sqrt{\varepsilon_0 \omega \rho}\ .$$

Объединяя со скин-слоем $H_s = \sqrt{\dfrac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$ из (5.2), и исключая, например, удельное сопротивление ρ, получим

$$H_s = \sqrt{2}\,\frac{c\ \left|\delta\right|}{\omega}. \tag{5.3}$$

Видим, что скин-слой напрямую связан с модулем импеданса. Это выражение можно использовать для оценки скин-слоя по известному импедансу и частоты поля. Мы снова выразили некоторую величину через импеданс, и, плюс, частоту.

Частота f связана с круговой частотой ω простым соотношением $f = 2\pi\omega$. Длина волны λ связана с частотой f соотношением $\lambda = c / f$. Это соотношение относится к длине волны в свободном пространстве. Отмечая все величины в свободном пространстве индексом 0, будем иметь длину волны в свободном пространстве $\lambda_0 = c / 2\pi\omega$. Это определение позволяет переписать выражение (5.3) в следующем виде:

$$H_s = \frac{\lambda_0\ \left|\delta\right|}{\sqrt{2}\pi} = 0.225\ \ \lambda_0\ \left|\delta\right|. \tag{5.4}$$

Скин-слой по порядку величин оказывается равным произведению длины волны в свободном пространстве на модуль импеданса.

§ 6. Эффективное кажущееся сопротивление

Земные недра сильно неоднородны. Согласно основным положениям теории глобальной тектоники, литосфера, внешняя твердая поверхность Земли (толщиной всего, где-то 30 км), представляет собой относительно жесткую оболочку, “плавающую” на поверхности очень вязкой мантии. Оболочка разбита тектоническими нарушениями на крупные и прочные литосферные мегаблоки – плиты, линейные размеры которых достигают несколько тысяч километров. Крупные тектонические плиты состоят из более мелких структурных блоков, которые, в свою очередь, разбиты на множество еще более мелких блоков. Реальный массив горных пород литосферы Земли представляет, таким образом, сложную иерархическую плиточную систему уменьшающихся по своим габаритам блоков. Иерархическое строение поверхностного слоя земли будет сказываться и на отклик электрических параметров системы на внешнее электромагнитное поле. При измерении импеданса мы будем получать некоторые эффективные значения электрической проводимости σ_{eff} и диэлектрической проводимости ε_{eff}. В 1952 г. для изучения неоднородных сред французский исследователь Л. Каньяр ввел кажущееся сопротивление. Идея его введения очень проста. Если был измерен модуль импеданса $\left|\delta\right|$, то, согласно формуле (4.9), удобно ввести

$$\rho_{eff} = \frac{|\delta|^2}{\varepsilon_0 \ \omega}. \qquad (6.1)$$

Это то значение кажущегося удельного сопротивления, которым обладала бы среда, если бы была однородной. Нетрудно получить, если известна фаза импеданса, и эффективное значение диэлектрической проницаемости. Для этого перепишем (4.5) в следующем виде:

$$\delta^2 = \left\{1 + \varepsilon \ + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right\}^{-1} = |\delta|^2 e^{2 \ i \ \varphi_\delta}.$$

Затем разделяем действительные и мнимые части. Получаемые два уравнения решаем относительно $1 + \varepsilon$ и $\sigma / \varepsilon_0 \omega$, после чего окончательно находим:

$$\rho_{eff} = \frac{|\delta|^2}{\varepsilon_0 \ \omega} \frac{1}{|\sin 2\varphi_\delta|}, \qquad (6.2)$$

$$1 + \varepsilon_{eff} = \frac{\cos 2\varphi_\delta}{|\delta|^2}. \qquad (6.3)$$

Результат (6.2) уточняет определение (6.1). Поскольку для однородной проводящей среды фаза $\varphi_\delta = -45^0$, то (6.2) переходит в (6.1).

Аналогично введению эффективного сопротивления, можно ввести эффективный скин - слой, определяемый формулой (5.2), только с заменой ρ на ρ_{eff}:

$$H_s = \sqrt{\frac{2\rho_{eff}}{\mu_0 \omega}}. \qquad (6.4)$$

Однако, если известен импеданс, то для вычисления скин-слоя лучше использовать формулу (5.4) $H_s = 0.225 \ \lambda_0 \ |\delta|$, - около одной четвертой части от произведения длины волны на модуль импеданса.

Теперь можно наметить общую программу. Если известен результат для однородной среды, то в случае неоднородной реальной земной среды, достаточно однородные электрические параметры заменить их эффективными значениями. Таким образом можно найти эффективные значения волнового числа и импеданса.

§ 7. Электромагнитная волна на большом расстоянии от излучателя

Для описания радиотрассы над земной поверхностью, вдоль которой распространяется электромагнитное поле, часто достаточно знать приведенный поверхностный импеданс δ. Причем всегда $|\delta|^2 \ << 1$. Мы знаем,

электрические свойства подстилающей среды
полностью описываются импедансом δ.

Согласно книге Е.Л. Фейнберга [стр. 92], ”Среды, с которыми приходится иметь дело в теории распространения радиоволн вдоль земли, это почва и атмосфера”. И далее [стр. 99], “… поверхностный слой земли всегда ведет себя совершенно различно в отношении волн различных частот”. Если $\mu_0 \ \omega / \rho \ >> \ \omega^2 \ \varepsilon / c^2$, то такие среды называются **индуктивными**. При этом, оказывается, если фаза импеданса находится в пределах от -90^0 до -45^0, то сплошные среды называют **сильно индуктивными**.

Наша цель – установить структуру электромагнитного (далее ЕМ) поля на границе раздела, рассмотреть углы наклона фронта волны в воздухе к импедансной поверхности. Выразить пространственные характеристики ЕМ поля через импеданс δ. Для определения компонент ЕМ поля Арнольд Зоммерфельд решал волновое уравнение с источником для векторного потенциала. Решение выражалось в виде комплексного интеграла (который так и называется – интеграл Зоммерфельда), вычисление которого представляет собой большие математические трудности. Мы для задачи определения компонент ЕМ поля решим непосредственно волновое уравнение (уравнение Гельмгольца), причем решение будем искать в волновой зоне – на расстояниях, больших, чем длина волны. Непосредственным вычислением интеграла Зоммерфельда займемся в другой статье.

Электрический вектор $\boldsymbol{E}$ вблизи земной поверхности имеет две составляющие (рис. 4.1): радиальную E_r - вдоль поверхности $z = 0$, и вертикальную E_z - нормально поверхности; магнитное поле H_y перпендикулярно направлению распространения волны и лежит в плоскости поверхности.

Выбираем цилиндрическую систему координат, такую, что радиальная ось r лежит на земной поверхности, ось z направлена по нормали к поверхности в воздух. Введем вектор $\boldsymbol{k}$ направления фронта волны. Его квадрат k^2, согласно уравнениям Максвелла:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon + \frac{i\,\mu_0\,\omega}{\rho}\,. \tag{7.1}$$

Напомним, здесь ω - круговая частота, c - скорость света, ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды (для воздушной среды $\varepsilon = 1$), ρ - удельное электрическое сопротивление вещества (для воздуха можно полагать $\rho \to \infty$), μ_0 - магнитная постоянная.

Распространение поля происходит вдоль радиальной координаты r, вектор магнитного поля $\boldsymbol{H}$ вблизи земной поверхности, как мы знаем, имеет только одну ненулевую компоненту $H_y(r,z)$:

$$\boldsymbol{H} = \left(0, H_y(r,z), 0\right). \tag{7.2}$$

В цилиндрической системе координат компоненты электрического поля будут находиться из следующих выражений:

$$E_r = -\frac{i\,\mu_0\,\omega}{k^2}\frac{\partial}{\partial z}H_y, \qquad E_z = \frac{i\,\mu_0\,\omega}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,H_y\right). \tag{7.3}$$

Временная зависимость дается множителем $\exp\left(-i\,\omega\,t\right)$, она одинакова для всех компонент полей и нами пока не выписывается. Поверхностный импеданс δ определяется следующим выражением:

$$\delta = -\frac{1}{\mu_0\,c}\left(\frac{E_r}{H_y}\right)_{z=0}\,. \tag{7.4}$$

Введение импеданса соотношением (7.4) называется условием Леонтовича. Его квадрат модуля оказывается много меньше единицы. Это необходимо, чтобы иметь дело с волновыми полями. Знак минус в (7.4), как мы знаем, связан с выбором ориентации оси z. Если бы ось z ориентировалась вглубь среды, то в (7.4) был бы знак ”+”.

В цилиндрической системе координат при полной угловой симметрии волновое уравнение $\nabla^2 H_y + k^2 H_y = 0$ для единственной ненулевой компоненты магнитного поля H_y будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_y}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}+k^2 H_y = 0\,. \qquad (7.5)$$

Начиная с А. Зоммерфельда, решение подобного уравнения для задач распространения радиоволн обычно сводят к комплексному интегралу, вычисление которого вызывает определенные трудности. Мы же уравнение (7.5) будем решать методом разделения переменных. Для этого введем χ - параметр разделения переменных уравнения (7.5). На расстояниях r таких, что

$$r >> \frac{1}{|\chi|}, \qquad (7.6)$$

выражениями, содержащими множители вида $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^{3/2}}$ и т.д., можно пренебречь. Тогда общее решение уравнения (7.5) в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид:

$$H_y(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r \pm i\ \sqrt{k^2-\chi^2}\ \ z\right). \qquad (7.7)$$

Решение легко проверяется прямой подстановкой выражения (7.7) в уравнение (7.5) и учетом неравенства (7.6). Если распространение волны происходит в однородной среде, и нет никаких границ, то в (7.7) в экспоненте достаточно выбрать один какой-то знак. Однако, если распространение происходит в двухслойной среде, когда имеется разделяющая среды граница, то понадобятся уже два выражения типа (7.7) с разными знаками.

По порядку величин параметр χ совпадает с обратной величиной длины волны (в воздухе), так что условие (7.6) совпадает с понятием волновой зоны – поле рассматривается на расстояниях от излучателя много больших, чем длина волны. Этим самым, мы ищем решение в волновой зоне. Как отмечено в [Фейнберг Е.Л., стр. 134], для выполнения ”граничных условий … достаточно рассмотреть поля на малом участке поверхности, лишь бы на нем укладывалось несколько длин волн”. Последнее всегда выполняется для вертикально ориентированной относительно поверхности земли приемной электрической антенны.

§ 8. Структура поля на границе раздела

Мы рассматриваем область “воздух – сильно индуктивная среда”. Величины, относящиеся к воздуху, будем маркировать индексом 0, для среды величины будут без маркера. С учетом нашего выбора ориентации оси z, выпишем магнитное поле в среде:

$$H_y(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r - i\ \sqrt{k^2-\chi^2}\ \ z\right), \qquad (8.1)$$

Знак ”-” при координате z выбиралось из условия, чтобы при распространения вглубь среды электромагнитная волна испытывала затухание. Компоненты электрического поля с учетом неравенства (7.6) находятся из выражений (7.3).

Из известных граничных условий (о них см. Часть I §8) о том, что тангенциальные компоненты полей на границе воздух – среда одинаковы, следует неизменность постоянных K и χ в обеих средах. Таким образом, в воздухе

$$H_{0y}(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r - i\ \sqrt{{k_0}^2-\chi^2}\ \ z\right), \tag{8.2}$$

Здесь квадрат волнового числа в воздухе ${k_0}^2 = \omega^2/c^2$. Далее, из граничных условий следует

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+(k/k_0)^2}}. \tag{8.3}$$

Из (4.5) $\delta = \left\{1+\varepsilon\ +\dfrac{i}{\varepsilon_0\omega\rho}\right\}^{-1/2}$ и (8.3) видно, что действительная часть импеданса $\operatorname{Re}\delta$ > 0, а мнимая часть $\operatorname{Im}\delta\ = -|\operatorname{Im}\delta| < 0$.

Из (8.3) и того, что $\chi = k_0 k/\sqrt{{k_0}^2+k^2}$, исключая k, находим:

$$\chi\ = k_0\sqrt{1-\delta^2}\ . \tag{8.4}$$

Параметр разделения переменных волнового уравнения напрямую связан с импедансом среды. При выполнении неравенства

$$|\delta|^2\ <<\ 1, \tag{8.5}$$

точное выражение $k = k_0\ \sqrt{-1+1/\delta^2}$, получаемое из (8.3), принимает следующее приближенное выражение:

$$k \approx k_0/\delta\,. \tag{8.6}$$

Этим самым мы выразили волновое число в среде через волновое число в воздухе и поверхностный импеданс индуктивной среды.

Таким образом, имеем следующие единственные ненулевые горизонтальные компоненты магнитного поля

в воздухе: $$H_{0y}(r,z) = K_0\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi_0\ r - i\ \sqrt{{k_0}^2-{\chi_0}^2}\ \ z\right),$$

в среде: $$H_y(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r - i\ \sqrt{k^2-\chi^2}\ \ z\right).$$

На поверхности, при $z = 0$, эти поля будут равны друг другу:

$$K_0\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi_0\ r\right)\ =\ K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r\right).$$

Чтобы это выражение не зависело от координаты r, необходимо положить $\chi_0 = \chi$. Тогда отсюда следует, что и $K_0 = K$. Все в точности так же, как и в декартовой системе координат (§ 4).

Из (7.3), с учетом того, что $\chi_0 = \chi$ и $K_0 = K$, находим горизонтальные компоненты электрического поля:

$$E_{0r}(r,z) = -\mu_0\ \omega\ \frac{\sqrt{{k_0}^2-\chi^2}}{{k_0}^2}K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \chi\ r - i\ \sqrt{{k_0}^2-\chi^2}\ \ z\right),$$

$$E_r(r,z) = -\mu_0\ \omega\ \frac{\sqrt{k^2-\chi^2}}{k^2} K \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(i\ \chi\ r - i\ \sqrt{k^2-\chi^2}\ \ z\right).$$

Эти поля должны быть равны друг другу при z = 0, откуда следует $\frac{\omega}{c\ k_0{}^2}\sqrt{k_0{}^2-\chi^2}$ = $\frac{\omega}{c\ k^2}\sqrt{k^2-\chi^2}$. Отсюда $\chi^2 = \frac{k_0{}^2\ k^2}{k_0{}^2+k^2}$ (еще раз получили известное выражение для параметра разделения переменных волнового уравнения). Подставляя поля $E_r(r,z)$ и $H_y(r,z)$ в (7.4), далее находим

$$\delta = \frac{\sqrt{k_0{}^2-\chi^2}}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(k/k_0)^2}},$$

т. е. (8.3), а также $\chi\ = k_0\sqrt{1-\delta^2}$, т.е. (8.4).

С учетом полученных результатов, магнитное поле в среде и в воздухе можно записать как:

$$H_y(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \frac{k_0\ k}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ r - i\ \frac{k^2}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ z\right), \qquad (8.7)$$

$$H_{0y}(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ \frac{k_0\ k}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ r - i\ \frac{k_0{}^2}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ z\right). \qquad (8.8)$$

Из (7.3) находим компоненты электрического поля в среде:

$$E_z(r,z) = -\frac{\mu_0\ \omega^2}{c\ k\ \sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ H_y(r,z), \qquad (8.9)$$

$$E_r(r,z) = -\frac{\mu_0\ \omega}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ H_y(r,z), \qquad (8.10)$$

и в воздухе:

$$E_{0z}(r,z) = -\frac{\mu_0\ c\ k}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ H_{0y}(r,z), \qquad (8.11)$$

$$E_{0r}(r,z) = -\frac{\mu_0\ \omega}{\sqrt{k_0{}^2+k^2}}\ \ H_{0y}(r,z). \qquad (8.12)$$

Этим самым, формулами (8.7)-(8.12) описывается структура электромагнитного поля как в свободном пространстве, так и в импедансной среде. (Чтобы не повторяться, электромагнитные поля далее будут означать то же самое, что и электромагнитные волны). При вычислении $E_r(r,z)$ и $E_{0r}(r,z)$, согласно (7.6), пренебрегали $1/2r$ по сравнению с χ. Наше рассмотрение согласуется с тем, что " … граничные условия Леонтовича оправдываются всегда, пока можно пренебречь производными от $1/r$ … . Это всегда возможно в волновой зоне" [Фейнберг, стр. 180]. В цитированной книге для решения волнового уравнения вводилась промежуточная функция – функция ослабления, для которой методом функции Грина находилось интегральное уравнение. Наше рассмотрение отличается тем, что мы сразу искали решение дифференциального уравнения (7.5) с учетом выполнения неравенства (7.6).

Далее обратим внимание, что поскольку $|\delta|^2$ << 1, то магнитное поле в воздухе можно представить как

$$H_{0y}(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ k_0\ r - i\ k_0\frac{\delta^2}{2}r - i\ k_0\ \delta\ z\right). \tag{8.13}$$

Оно совпадает с известным решением Зоммерфельда для электромагнитного поля, полученным им в волновой зоне из интегрального уравнения для функции ослабления на проводящей радиотрассе. В импедансной среде магнитное поле будет

$$H_y(r,z) = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(i\ k_0\ r - i\ k_0\frac{\delta^2}{2}r - i\ \frac{k_0}{\delta}z\right). \tag{8.14}$$

Различие между обеими полями (8.13) и (8.14) только в коэффициенте при вертикальной координате. В импедансной среде этот коэффициент заметно больше такого же коэффициента в воздухе. Это означает, что электромагнитная волна в импедансной среде затухает быстрее, чем в свободном пространстве.

Найдем углы наклона волнового фронта ЕМ волны к плоскости распространения. Эти углы φ_0 и φ в первом и четвертом квадрантах соответственно, определяются как (см. ниже рис. 8.1)

в воздухе
$$tg\ \varphi_0 = \frac{|E_{0z}|}{|E_{0r}|}, \tag{8.15}$$

в импедансной среде
$$tg\ \varphi = \frac{|E_z|}{|E_r|}. \tag{8.16}$$

Используя (8.9), (8.10) и (8.13), (8.14) находим

$$tg\ \varphi_0 = \frac{|k|}{k_0}, \qquad tg\ \varphi = \frac{k_0}{|k|}. \tag{8.17}$$

Или, с учетом (8.6),

$$tg\ \varphi_0 = \frac{1}{|\delta|}, \qquad tg\ \varphi = |\delta|. \tag{8.18}$$

Поскольку выполняется неравенство (8.5), то $\varphi_0 \approx 90^0$, - в воздухе волна распространяется вдоль поверхности. В сильно индуктивной импедансной среде $\varphi \approx 0^0$, и волна распространяется вглубь среды (рис. 8.1). Кроме того, из (8.15) и (8.16) следует, что углы φ и φ_0 совместно составляют прямой угол. Поскольку выполняется неравенство (8.5), то в воздухе электромагнитная волна затухает по высоте на расстоянии в несколько длин волн. В импедансной же среде затухание происходит уже на длине волны. В радиальном направлении, вдоль поверхности, амплитуда электромагнитной волны затухает следующим образом: $\frac{K}{\sqrt{r}}\exp(-B\ r)$. А это заметно медленнее, чем, если бы распространение происходило вдоль идеально проводящей поверхности, где поле затухает как $1/r$.

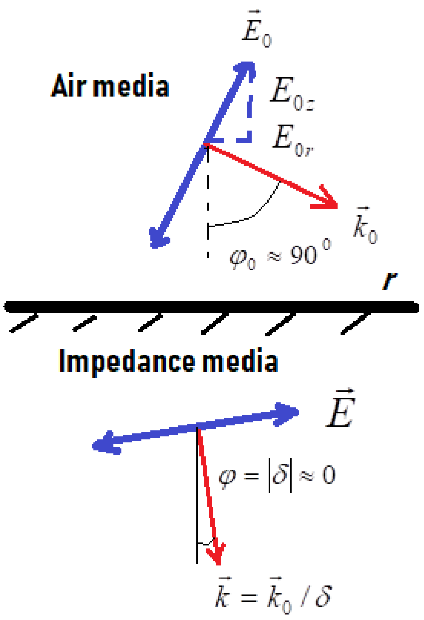

Рис. 8.1. Волновые вектора $\vec{k}_0$ и $\vec{k}$ указывают направление распространения электромагнитных волн в воздухе и импедансной среде. Размеры стрелок относительны.

§ 9. Пространственные характеристики электромагнитной волны

Углы φ_0 и φ выражены через модуль импеданса сильно индуктивной подстилающей среды. Также через импеданс можно выразить пространственные характеристики компонентов полей.

Беря абсолютные значения компонентов полей из предыдущего §8, находим следующие пространственные характеристики для магнитного поля:

$$\left|H_y(r,z)\right| = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(-k_0 \operatorname{Re}\delta\ \left|\operatorname{Im}\delta\right|\ r + \frac{k_0\ \left|\operatorname{Im}\delta\right|}{\left|\delta\right|^2}\ z\right), \tag{9.1}$$

$$\left|H_{0y}(r,z)\right| = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(-k_0 \operatorname{Re}\delta\ \left|\operatorname{Im}\delta\right|\ r - k_0\ \left|\operatorname{Im}\delta\right|\ z\right). \tag{9.2}$$

и для компонент электрического поля:

$$\left|E_z(r,z)\right| = -\mu_0\ c\ \left|\delta\right|^2\ \left|H_y(r,z)\right|, \tag{9.3}$$

$$\left|E_r(r,z)\right| = -\mu_0\ c\ \left|\delta\right|\ \left|H_y(r,z)\right|, \tag{9.4}$$

$$\left|E_{0z}(r,z)\right| = -\mu_0\ c\ \left|H_{0y}(r,z)\right|, \tag{9.5}$$

$$\left|E_{0r}(r,z)\right| = -\mu_0\ c\ \left|\delta\right|\ \left|H_{0y}(r,z)\right|. \tag{9.6}$$

Теперь можно установить структуру электромагнитного поля в свободном пространстве и в импедансной среде. Из выше приведенных выражений сначала находим, что на поверхности, т.е. на границе $z=0$ тангенциальная компонента магнитного поля не меняется. Если принять $H_{0y}(r,z=0)=1$, то и $H_y(r,z=0)=1$. Аналогично можно найти величины электрического поля. Если принять $E_{0z}(r,z=0)=1$, то из (9.3)-(9.6) находим:

$$E_z(r,z=0)=\delta^2,$$
$$E_{0r}(r,z=0)=\delta,$$
$$E_r(r,z=0)=\delta.$$

Для идеального проводника удельное сопротивление стремится к нулю. Вместе с ним стремиться к нулю будет импеданс, а также и компоненты электрического поля в проводящей среде. Если равны нулю компоненты вектора, то равным нулю будет и весь вектор. Таким образом, **в проводнике в нулевом приближении по импедансу электрическое поле равно нулю, что собственно является определением самого проводника**.

Выпишем явно выражение для пространственной характеристики вертикальной компоненты электрического поля в свободном пространстве:

$$|E_{0z}(r,z)| = K\frac{1}{\sqrt{r}}\exp\left(-k_0\,\mathrm{Re}\,\delta\,|\mathrm{Im}\,\delta|\,r - k_0\,|\mathrm{Im}\,\delta|\,z\right). \qquad (9.7)$$

При этом из сравнения с решением Зоммерфельда [Фейнберг, стр. 113] можно выразить множитель K через излучаемую мощность P (10^3 watt), а именно:

$$K = \frac{300\sqrt{P}}{\mu_0\, c}. \qquad (9.8)$$

Само электрическое поле измеряется в 10^{-3} V/m. При этом из сравнения с решением Зоммерфельда [Фейнберг, стр. 113] можно выразить множитель K через излучаемую мощность P. Формула для абсолютного значения электрического поля при этом принимает следующий вид:

$$\left|E_{0z}\left(\frac{мВ}{м}\right)\right| = 300\sqrt{G\cdot P(кВт)}\,\frac{2\pi|\delta|}{\sqrt{\lambda_0(м)\ r(км)}}\cdot$$
$$\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\mathrm{Re}\,\delta\,|\mathrm{Im}\,\delta|\,r - \frac{2\pi}{\lambda_0}|\mathrm{Im}\,\delta|\,z\right). \qquad (9.9)$$

Здесь G – усиление антенны, λ_0 - длина волны в воздухе.

В этой части III наиболее кратко определены скин-слой, волновое число в сплошной среде и импеданс сплошной среды (которые без вывода приведены в Части I). Установлены пространственные характеристики электромагнитной волны в свободном пространстве и в импедансной среде.

Наиболее часто цитированная литература (ее при желании можно найти в интернете):

Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. - М.: Физматлит, 1999. 496 с.