При зондирование земной среды используют уравнения Максвелла. Об этих уравнениях рассказывается практически во всех учебниках, посвященных электромагнетизму. Автор с ними систематически познакомился по Фейнмановским лекциям по физике, которые рекомендуем всем. От Фейнмановских лекций по физике наше изложение отличается более подробным изложением граничных условий. Какие электрические характеристики необходимы при зондирование различных сред, рассказано в предыдущей статье “**ИМПЕДАНС И ДРУГИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ЗОНДИРОВАНИЕ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ СРЕДЫ**” в открытом сайте file:///D:/dowlander/28.pdf, ссылаться на которую будем как ЧАСТЬ I.

ЧАСТЬ II

УДК 538.566

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В.К. Балханов

Институт физического материаловедения СО РАН,

670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, д.6, E-mail: ballar@yandex.ru

Аннотация.

Уравнения Максвелла – основные уравнения, управляющие распространением электромагнитных волн в импедансных (геоэлектрических) средах. Мы изложим стандартный анализ этих уравнений, имеющийся практически во всех учебниках по электричеству и магнетизм. Этот анализ совершенно необходим, если мы хотим его применить для определения электрических характеристик поверхностного слоя Земли. Подробно расскажем, как получают граничные условия. Необходимо знание векторного анализа и умение дифференцировать и интегрировать.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, векторный потенциал, граничные условия.

Abstract.

Maxwell's equations are the main equations that control the spread of electromagnetic waves in impedal (geoelectric) environments. We will set out the standard analysis of these equations, available in almost all textbooks on electricity and magnetism. This analysis is absolutely necessary if we are to apply it to determine the electrical characteristics of the Earth's surface layer. Let's tell you in detail how the boundary conditions get. You need to know vector analysis and the ability to differentiate and integrate.

Key words: Maxwell's equations, vector potential, boundary conditions.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Векторное исчисление полей

Во Вселенной существует сила, которая характеризуется ***зарядом*** тела *e* (Кулон). Когда заряды покоятся, то между ними действуют ***электрические*** силы. Если заряды находятся в движении, то возникает ***магнитная*** сила. Поэтому в общем случае говорят об ***электромагнетизме***. Из опытов было установлено, что электрическим силам отвечает электрическое поле $\boldsymbol{E}$ (Вольт/м), соответственно, магнитной силе отвечает магнитная индукция $\boldsymbol{B}$ (Тесла). Движение зарядов описывается потоком электрического тока $\boldsymbol{j}$ (Ампер/м^2). Существует важный принцип, который состоит в следующем. Пусть некоторое количество зарядов создает поле $\boldsymbol{E}_1$, другая совокупность зарядов – поле $\boldsymbol{E}_2$. При одновременном действии всего набора зарядов, возникающее поле будет равна сумме полей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$. Это

принцип суперпозиции: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$.

Принцип означает, что если известен закон для электрического и магнитного полей, образуемых одиночным зарядом, то значит нам известны все законы электромагнетизма.

Еще один принцип означает, что если убрать заряды, то в общем случае поля не исчезнут. Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ потому и называются ***полями***, что могут быть определены в каждой точке пространства в любой момент времени:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z, t); \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x, y, z, t).$$

У понятия поля есть важное свойство: связь между значениями полей в некоторой точке и значениями их в соседней точке. Несколько таких соотношений (в форме дифференциальных уравнений) достаточно, чтобы описать поля.

Векторные поля обладают двумя математически важными свойствами. Они могут как пересекать замкнутую поверхность, так и “течь” по замкнутому контуру. В первом случае определяют поток:

$$\boldsymbol{поток} = \begin{pmatrix} средняя \ \ нормальная \\ компонента \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} площадь \\ поверхност \ и \end{pmatrix},$$

во втором случае определяют циркуляцию:

$$\boldsymbol{циркуляция} = \begin{pmatrix} средняя \ \ касательна \ я \\ компонента \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} длина \ \ пути \\ обхода \end{pmatrix}.$$

Пользуясь только этими двумя понятиями – потоком и циркуляцией – можно описать все законы электричества и магнетизма!

Первый закон электромагнетизма описывает положение, что электрическое поле создается зарядами. Это

закон Гаусса:

$$\begin{pmatrix} поток \ \ поля \ \ \vec{E} \ \ сквозь \ \ любую \\ замкнутую \ \ поверхност \ ь \end{pmatrix} = \frac{заряд \ \ внутри \ \ ее}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 - некоторая постоянная (диэлектрическая постоянная вакуума).

Если взять в пространстве некоторую произвольную замкнутую кривую и измерить циркуляцию электрического поля вдоль этой кривой, то окажется, то она равна изменению со временем потока магнитного поля сквозь поверхность внутри этой кривой. Это

закон Фарадея:

$$\begin{pmatrix} \text{циркуляция поля } \vec{E} \\ \text{по контуру } C \end{pmatrix} = -\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} \text{поток поля } \vec{B} \text{ сквозь} \\ \text{поверхность } S \end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что магнитное поле создается движением зарядов, ему не нужно "магнитных зарядов". Это

закон Ампера: $$\begin{pmatrix} \text{поток поля } \vec{B} \text{ сквозь любую} \\ \text{замкнутую поверхность} \end{pmatrix} = 0.$$

Четвертое последнее уравнение почти аналогично закону Фарадея и говорит о связи циркуляции магнитного поля, изменении со временем потока электрического поля и **плюс** движение зарядов. Это

закон Максвелла:

$$c^2\begin{pmatrix} \text{циркуляция } \vec{B} \\ \text{по контуру } C \end{pmatrix} = \frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} \text{поток } \vec{E} \\ \text{сквозь } S \end{pmatrix} + \frac{\text{электрический ток через } S}{\varepsilon_0}.$$

Здесь c^2 – квадрат скорости света.

Дифференцирование выражается с помощью оператора набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Обычно стрелка сверху означает, что имеем дело с вектором. Но для оператора набла как векторную величину стрелку не будем указывать. В чем полезность оператора набла: если ψ - скаляр, $\boldsymbol{h} \equiv \vec{h}$ - вектор (чтобы выглядело красиво, вектор иногда будем выделять жирным курсивом) и использованы следующие обозначения: точки · означают скалярное, а крестики × – векторное произведения, то при однократном применении оператора набла получают

$$grad\,\psi = \nabla\psi = \text{вектор},$$

$$div\ \vec{h} = \nabla\cdot\vec{h} = \text{скаляр},$$

$$rot\ \vec{h} = \nabla\times\vec{h} = \text{вектор},$$

Здесь, как обычно, точка · означает скалярное умножение векторов, крестик × означает векторное умножение векторов. При двукратном применении оператора набла находим

$$\nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla^2\psi = \text{скалярное поле}$$
$$\nabla\times(\nabla\psi) = 0$$
$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{h}\right) = \text{векторное поле}$$
$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{h}\right) = 0$$
$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{h}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{h}\right) - \nabla^2\vec{h}.$$

Здесь оператор ∇^2 называется лапласианом и в декартовых координатах (x, y, z), согласно векторному анализу, он имеет вид

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Из приведенных формул следуют две математические теоремы.
Первая теорема говорит, что

если $\nabla \times \vec{h} = 0$,
то имеется такое скалярное поле ψ,
что $\bar{h} = \nabla \psi$.

Вторая теорема утверждает, что

если $\nabla \cdot \vec{h} = 0$,
то имеется такое векторное поле ***A***,
что ***h*** = $\nabla \times \vec{A}$.

Также напомним интегральное исчисление векторных полей. Пусть имеется скалярное поле ψ (*x*, *y*, *z*), которое в точках 1 и 2 принимает значения $\psi(1)$ и $\psi(2)$. Соединим эти положения некоторой кривой *Г*. По смыслу градиента на небольшом участке *ab* изменение поля будет

$$\Delta \psi = \psi(b) - \psi(a) = \nabla \psi \cdot \Delta \vec{s}.$$

Суммируя Δs по всей кривой *Г* от точки 1 до точки 2, получаем

$$\text{криволинейный интеграл} = \int\limits_{1}^{2} \nabla \psi \cdot \Delta \vec{s}.$$
$$\text{\textit{кривая Г}}$$

Интеграл здесь верен для **любой** кривой, соединяющий точки 1 и 2. Таким образом,

ТЕОРЕМА 3: $$\psi(2) - \psi(1) = \int\limits_{1}^{2} \nabla \psi \cdot \Delta \vec{s}.$$
$$\text{\textit{любая кривая Г}}$$

Если кривая является замкнутой, то криволинейный интеграл обозначается как $\oint\limits_{Г} \vec{h} \cdot \Delta \vec{s}$. Каждый небольшой участок кривой *Г* мы представили в виде небольшого вектора $\Delta \vec{s}$. Также каждый небольшой участок поверхности *S* можно представить в виде небольшого вектора $d\vec{a}$. Введем ***n*** – единичный вектор нормали к поверхности. Тогда нормальная компонента h_n для любого вектора ***h*** будет h_n = ***n· h***, или ***h*** = h_n ***n***. Аналогично для маленького вектора площади будем иметь

$$d\vec{a} = \boldsymbol{n}\, da.$$

Благодаря этому для произвольного векторного поля

$$\text{поток } \boldsymbol{h} \text{ сквозь поверхность } S = \int\limits_{S} \vec{h} \cdot d\vec{a}.$$

Другие математические теоремы имеют собственные наименования. Это

теорема Гаусса: $$\int\limits_{S} \vec{h} \cdot d\vec{a} = \int\limits_{V} \nabla \cdot \vec{h}\, dV,$$

где S – произвольная замкнутая поверхность, V – объем внутри нее. И

теорема Стокса: $$\oint_{\Gamma} \vec{h} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(\nabla \times \vec{h}\right) d\vec{a},$$

где S – произвольная поверхность, ограниченная контуром Γ.

Уравнения Максвелла зачастую удобно решать, выбирая ту или иную систему координат. Сначала будем использовать декартову систему координат. В последующем будем широко использоваться криволинейные системы координат – цилиндрическую и сферическую. Также в дальнейшем приведем формулы действий с оператором набла в криволинейных координатах.

§ 2. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла описывают электрическое и магнитное поля, возникающие от системы движущихся в пространстве электрических зарядов плотностью q (Кулон/м^3). При своем движении заряды создают в окружающем пространстве сложную вязь потока электрического тока $\vec{j}$, электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ полей. Вся эта совокупность изменяющихся в пространстве и во времени величин описываются четырьмя векторными дифференциальными уравнениями в частных производных. Их открыл Дж. Максвелл в 1860 – 1865 годах, и они имеют следующий вид:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q / \varepsilon_0 \qquad (2.1.a) \qquad\qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.1.c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2.1.b) \qquad\qquad c^2 \, \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} \qquad (2.1.d)$$

Уравнения описывают связь между значениями полей в некоторой точке и значениями их в соседней точке. Способ записи законов в форме дифференциальных уравнений обладает тем преимуществом, что они фундаментальны и точны. В них нет ничего лишнего! Уравнения Максвелла записаны в интернациональной системе единиц измерения СИ, которой будем всюду пользоваться. Интегрируя (2.1) по длине, площади и объему, можно получить представленную в §1 словесную формулировку уравнений Максвелла.

Напомним, введены фундаментальная постоянная – скорость света c $(= 2.9979 \cdot 10^8$ м/с) и размерная единица ε_0, в СИ ее называют диэлектрической постоянной вакуума и определяют как

$$\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = 10^{-7} \cdot c^2 . \qquad (2.2)$$

Отсюда $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ = Кулон/Вольт·м.

Стандартным способом исследования при анализе уравнений (2.1) является использование математического приема, заключающегося в действие слева на уравнения (2.1) оператором набла. Например, возьмем div от (2.1.d):

$$c^2 \, \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\partial \nabla \cdot \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \vec{j} .$$

Выражение слева для любого вектора всегда равно нулю, далее $\nabla \cdot \vec{E}$, согласно (2.1.а), заменяем на q/ε_0, в итоге остается:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \tag{2.3}$$

Это уравнение выражает собой закон сохранения заряда. О нем подробно рассказывается во всех книгах по электромагнетизму.

Уравнения Максвелла верны в глобальном масштабе – во всем пространстве. Но реально исследователь рассматривает ограниченный участок, который полностью или частично заполнен веществом. В этом случае заряды удобно разделять на относящиеся к рассматриваемому участку и на все остальные – сторонние. Тогда можно считать, что в уравнениях Максвелла q и $\vec{j}$ относятся к изучаемой области, а поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будут внешними по отношению к этой области.

Мы будем рассматривать только переменные поля с какой-то определенной частотой. Источником электромагнитного излучения обычно являются радиопередающие станции, грозовая активность в тропических районах, вариации потенциала атмосферного электричества и геомагнитного поля Земли, излучение от космических частиц.

§ 3. Граничные условия

Если величина W в первой среде имеет значение W_1, а во второй среде значение W_2, и на границе эти значения не меняются, т.е. $W_1 = W_2$, то говорят, что эта величина при пересечение границы не имеет разрывов. Или, по другому, величина W пересекает границу непрерывным образом. Однако, если на границе будет соблюдаться, например, $W_1 = 4\ W_2$, то величина W будет иметь разрыв $W_2 - W_1 = 3\ W_1$.

Разные участки вещества обладают разными электрическими параметрами. Понятно, что и внешние поля проникать в них будут по-разному. Если в среде 1 электрическое поле будет описываться вектором $\vec{E}_1$, то в среде 2 поле будет описываться вектором $\vec{E}_2$. Возникает задача, как будут вести себя оба вектора на границе раздела сред. Оказывается, если поле подчиняется уравнению

$$\nabla \cdot \alpha \vec{E} = 0,$$

то на границе должны быть равны нормальные компоненты:

$$\alpha_1 E_{1n} = \alpha_2 E_{2n}.$$

Если поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla \times \alpha \vec{E} = 0,$$

то на границе будут равны тангенциальные компоненты (рис. 3.1):

$$\alpha_1 E_{1x} = \alpha_2 E_{2x}, \quad \alpha_1 E_{1y} = \alpha_2 E_{2y}.$$

Если ввести тангенциальный вектор $\vec{E}_t$, состоящий из компонент E_x и E_y, то последние соотношения можно записать в виде одного равенства:

$$\alpha_1 \vec{E}_{1t} = \alpha_2 \vec{E}_{2t}.$$

Таким же соотношениям удовлетворяет любой вектор $\vec{A}$, в частности в некоторых случаях и вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

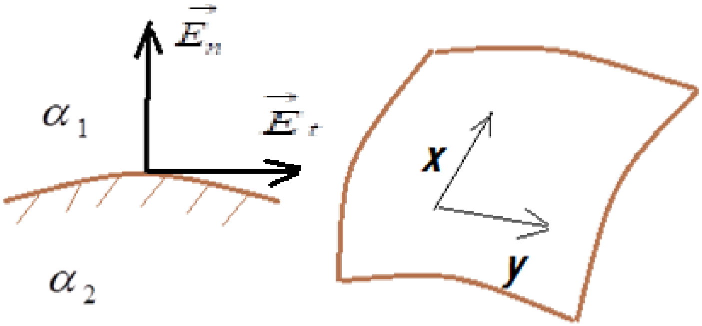

Рис. 3.1. Граничные условия на маленьком участке границы в виде плоскости *xy*.

Покажем подробно, как получают граничные условия. Для этого сначала надо ввести систему координат, как на рис. 3.2. Будем считать, что распространение электромагнитных волн происходит вдоль оси *x*. Также введем маленький отрезок Δz из второй среды в первую. Далее проинтегрируем уравнение (3.1.a) $\nabla \cdot \varepsilon\ \vec{E} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ по dz

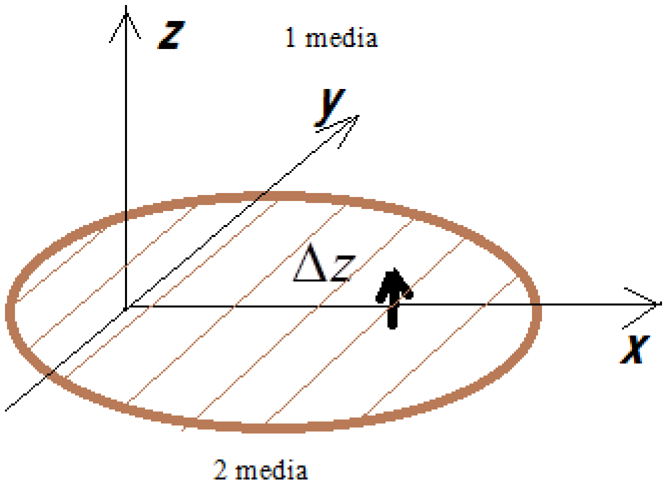

Рис. 3.2. Ориентация координатных осей.

вдоль этого отрезка из второй среды в первую: $\int_2^1 \nabla \cdot \varepsilon\ \vec{E}\ dz = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_2^1 qdz$. Вспоминая правило скалярного умножения для двух векторов, получаем

$$\int_2^1 \left(\frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial z}\right) dz = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_2^1 qdz .$$

Теперь устремим отрезок Δz к нулю. Для интеграла справа введем

$$\sigma_{sur} = \int qdz .$$

Легко понять, что это будет поверхностная плотность зарядов, т.е. электрических зарядов, растекшихся по поверхности. Далее, имеем

$$\int_2^1 \left(\frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial z}\right) dz = \int_2^1 \left(\frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial y}\right) dz + \varepsilon_2 E_{z2} - \varepsilon_1 E_{z1} .$$

При устремлении Δz к нулю оставшийся интеграл справа обращается в нуль. Так что, остается

$$\varepsilon_2 E_{z2} - \varepsilon_1 E_{z1} = \sigma_{sur} / \varepsilon_0 . \tag{3.1}$$

Мы установили граничное условие для электрического поля. Оказывается, из-за отличия диэлектрических проницаемостей разных сред и наличие поверхностных зарядов **нормальная компонента (*z*-компонента) электрического поля претерпевает разрыв**. Если поверхностные заряды отсутствуют, то получаем

$$\varepsilon_2 E_{z2} = \varepsilon_1 E_{z1} .$$

А это равенство $\alpha_1 E_{1n} = \alpha_2 E_{2n}$ в других обозначениях.

Обратимся к уравнению (3.1.c) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Возьмем от нее *x*-компоненту и проинтегрируем по dz вдоль отрезка Δz из второй среды в первую:

$$\int_2^1 \left(\nabla \times \vec{E}\right)_x dz = \int_2^1 \frac{\partial B_x}{\partial t} dz .$$

Получим:

$$\int_2^1 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) dz - E_{x2} + E_{x1} = \frac{d}{d t} \int_2^1 B_x dz .$$

При устремлении Δz к нулю оба интеграла обратятся в нуль, и останется

$$E_{x2} = E_{x1} .$$

Взяв от уравнения (3.1.c) *y*-компоненту, аналогично находим

$$E_{y_2} = E_{y_1} .$$

Если ввести двумерный вектор на поверхности $\vec{E}_\tau = (E_{z1}, E_{z2})$, то оба равенства примут вид одного условия для вектора:

$$\vec{E}_{\tau 2} = \vec{E}_{\tau 1} .$$

Следовательно, **тангенциальная проекция электрического поля пересекает границу двух сред непрерывным образом**.

Перейдем к магнитному полю. Действуя только что описанным образом, из уравнения (2.1.b) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ получим:

$$B_{z2} = B_{z1} . \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что **нормальная компонента (*z*-компонента) магнитной индукции пересекает границу непрерывным образом**. Теперь перейдем к уравнению (2.1.d). С учетом магнитных свойств среды, т.е. с учетом магнитной проницаемости μ, это уравнение принимает следующий вид:

$$c^2\ \nabla\times\frac{1}{\mu}\vec{B}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial\ t}+\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}\ . \tag{3.3}$$

Направим ток вдоль оси x. Мы знаем, теперь надо взять x-компоненту от уравнения (3.3) и проинтегрировать все по dz вдоль отрезка Δz из второй среды в первую. Вспоминая правила векторного умножения, получаем

$$\int\limits_2^1\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_Z}{\partial y}\right)dz+\frac{1}{\mu_2}B_{y\,2}-\frac{1}{\mu_1}B_{y_1}\ =\ \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_2^1\ j_x dz\ .$$

При устремление отрезка Δz к нулю, оставшийся интеграл обращается в нуль. Так что остается:

$$\frac{1}{\mu_2}B_{y\,2}-\frac{1}{\mu_1}B_{y_1}\ =\ \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_2^1\ j_x dz\ .$$

Справа интеграл дает поверхностный ток $g_y\ =\int\ j_x dz$. И получаем граничное условие для магнитной индукции:

$$\frac{1}{\mu_2}B_{y\,2}-\frac{1}{\mu_1}B_{y_1}=g_y\,. \tag{3.4}$$

Совершенно аналогичное условие будет для x-компоненты. Если ввести магнитное поле $H=B/\mu_0\mu$, то получаем, что тангенциальная проекция магнитного поля претерпевает разрыв:

$$H_{\tau\,2}-H_{\tau\,1}=\mu_0 g_\tau\,. \tag{3.5}$$

И если вместе с поверхностным зарядом отсутствует и поверхностный ток, то

$$H_{\tau\,2}=H_{\tau\,1}\,.$$

Для немагнитных сред магнитная проницаемость равняется единице, поэтому для немагнитных сред на границе раздела равны тангенциальные составляющие магнитной индукции:

$$B_{\tau\,2}=B_{\tau\,1}\,. \tag{3.6}$$

То есть, с учетом (3.2) $B_{z\,2}=B_{z\,1}$, **при пересечении границы немагнитных сред вектор магнитной индукция не имеет разрывов**. Это и есть граничное условие для магнитной индукции для немагнитных сред.

§ 4. Импедансные среды

Для описания сформировавшегося электромагнитного поля в сплошной среде, уравнения Максвелла необходимо изменить. Именно, заряды и создаваемые ими токи разделим на сторонние, ответственные за создание электромагнитных волн, и на заряды и токи среды. Последние ответственны за поглощение и переизлучение электромагнитных волн, что приводит ко многим эффектам. Самые известные из них, это изменение направления распространения волны, замедление скорости и затухание, когда электромагнитное поле вообще поглощается средой. Оказывается, указанные эффекты можно описать введением в уравнения Максвелла всего двух параметров – электрической проводимости σ (Сименс/м) и диэлектрической проницаемости ε (безразмерная) (см. Часть I). Из термодинамических соображений, связанных с тем, что в веществе энергия всегда переходит в тепло, следует [Ландау, Лифшиц, Электродинамика сплошных сред]

$$\varepsilon \geq 1.$$

Равенство $\varepsilon = 1$, очевидно, относится к случаю свободного пространства. Сразу заметим, что в реальности природные среды неоднородны и многослойны. Для таких сред можно вводить эффективную диэлектрическую проницаемость, значение которой может принимать любое значение и иметь в некоторых случаях отрицательный знак (Часть I).

Отвлекаясь от сторонних зарядов и токов, ведь мы рассматриваем уже имеющиеся в наличии электромагнитные поля, уравнения Максвелла в сплошной среде будут иметь следующий вид:

$$\nabla \cdot \varepsilon \ \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (4.1.a) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.1.c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.1.b) \qquad c^2 \ \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{E} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \quad (4.1.d)$$

В пустоте $\varepsilon = 1$ и $\sigma = 0$. Плотности зарядов q и токов $\vec{j}$ здесь уже связаны только со сторонними зарядами.

Если сравнить уравнения (2.1) и (4.1), то увидим, что наличие сплошной среды сводится к замене

$$\vec{E} \to \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{j} \to \sigma \vec{E}.$$

Первое из них является определением диэлектрической проницаемости ε: если в свободном пространстве электрическое поле было $\vec{E}$, то в сплошном материале поле ослабляется в ε раз. Поэтому в уравнениях (4.1.a) и (4.1.d) введение диэлектрической проницаемости ε отмечено *умножением* его на электрическое поле. Для магнитных сред почти аналогичная ситуация. Наличие таких свойств сводится к тому, что магнитное поле *делится* на магнитную проницаемость μ. Магнитное поле в среде с магнитными свойствами может как уменьшаться, так и увеличиваться. Поэтому магнитная проницаемость принимает значения от меньшей единицы, до значений, большей единицы. Применимость линейных уравнений Максвелла (3.1) ограничена полями, существующими внутри атомов. Оказывается, если поля начинают расти, то учет этого обычно сводится к зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от этих полей. И уравнения Максвелла становятся нелинейными. Но мы такими уравнениями не будем пользоваться. На Земле практически все среды можно исследовать линейными уравнениями Максвелла!

Второе соотношение $\vec{j} \to \sigma \vec{E}$ есть всем знакомый закон Ома: ток в электрической цепи прямо пропорционален приложенному в эту цепь напряжению. Оказывается, чтобы из системы уравнений (2.1) получить систему уравнений (4.1), достаточно плотность тока $\vec{j}$ заменить следующим выражением:

$$\vec{j} \to \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial\ t}(\varepsilon - 1)\vec{E} + \sigma\ \vec{E} + \vec{j}\ .$$

Это легко можно проверить.

Вместо постоянных ε_0 и c часто используют их комбинацию, называемой магнитной постоянной:

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Генри/м.} \tag{4.2}$$

Она позволяет вместо вектора $\vec{B}$, магнитной индукции, использовать другой вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{ (Ампер/м),} \tag{4.3}$$

который собственно и называется магнитным полем. Таким образом,

в свободном пространстве электрическое поле описывается вектором $E = \vec{E}$, магнитное поле вектором $H = \vec{H}$, или магнитной индукцией $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. В сплошной среде электрическое поле будет равно $\vec{E}/\varepsilon$, а магнитное поле $\mu\ \vec{H}$, или магнитная индукция $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$.

Мы будем также широко использовать обратную величину проводимости - удельное сопротивление, которая обычно и применяется в электроразведке,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \text{ (Ом·м).} \tag{4.4}$$

Использование этой величины часто позволяет некоторые выражения представлять в более компактном и более красивом виде. Тем более, в геофизике принято говорить, что такая-та порода обладает таким-то удельным сопротивлением. Но читатель может встретиться с обеим сторонниками: одни будут спрашивать, чему равна проводимость, другие будут говорить об удельном сопротивлении. Но мы то с вами знаем, эти две величины связаны простым соотношением (4.4).

Введенные диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ описывают электрические характеристики вещества. Они показывают, как реагирует сплошная среда на наличие внешних электрических и магнитных полей. Одновременный учет ε и σ означает, что среда обладает диэлектрическими и проводящими свойствами. Такие среды будем называть **импедансными**.

Характер переменных электромагнитных полей в материальных средах существенно зависит от рода этих сред и от порядка величины частоты поля. В отношении электрических свойств все тела делятся на две категории – проводники и диэлектрики. Основное свойство проводников – электрическое поле внутри них равно нулю:

в проводнике $\vec{E}$ = 0.

Однако магнитное поле может свободно проникать в вещество, а согласно уравнениям Максвелла, если оно переменное, то оно вызывает появление переменного электрического поля. Перестройка зарядов происходит таким образом, что они выталкивают электрическое поле из вещества. Это обстоятельство проявляется двояким образом. Реально вытеснение поля $\vec{E}$ из проводника означает, что переменное электромагнитное поле проникает только в приповерхностный слой, однако этого достаточно, чтобы можно было изучать электрические характеристики земной среды (в чем и состоит задача электроразведки). Второе обстоятельство проявляется в том, что вид уравнений Максвелла в форме (4.1) применим не на всем интервале частот. Оказывается,

> **пользоваться постоянными значениями диэлектрической постоянной и проводимости можно, пока длина волны внешнего электромагнитного поля заметно больше атомных и молекулярных размеров. Волновое движение с большой длиной волны не замечает различные неровности в виде атомов и молекул.**

Чтобы считать проводимость σ постоянным, период изменения поля должен быть велик по сравнению со временем релаксации τ, характерным для микроскопического механизма проводимости, т.е. должно быть

$$\omega << \frac{1}{\tau}. \tag{4.6}$$

Тогда, если выполняется неравенство

$$\varepsilon_0 \, \omega \, \rho << 1, \tag{4.7}$$

то можно пренебречь производной по времени электрического поля. Физически неравенство (4.7) означает, что амплитуда внешнего переменного магнитного поля, проникая в проводник, прежде чем затухнуть, должна сделать несколько колебаний, чтобы можно было вообще говорить о переменном поле. Получаемые при этом уравнения часто называют *квазистационарными*.

Неравенство (4.7) имеет еще следующую интерпретацию. Уравнение (4.1.d) имеет два слагаемых: $\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \vec{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{E}$. Первое из них описывает ток смещения, а второе – ток проводимости. Тогда неравенство (4.6) означает преобладание тока проводимости над током смещения. Таким образом, квазистационарность поля означает приближение проводящей среды. Наличие граничной частоты позволяет разбить среды на две категории. Если в некотором частотном диапазоне преобладает ток смещения, то среды, в котором это происходит, называют **емкостными**. В обратном случае, преобладания тока проводимости, среды называют **индуктивными**.

В диэлектрике частота вообще ничем не ограничена. Это видно хотя бы из того, что за небольшим изменением, уравнения Максвелла в однородном диэлектрике совпадают с уравнениями Максвелла в пустоте, где сами уравнения имеют точный микроскопический смысл, в силу чего верны вообще. Возникает вопрос о существовании ограничения на частоту в случае импедансных сред, когда необходимо учитывать одновременное наличие проводимости и диэлектрической проницаемости. Вопрос легко решается. Аппроксимируя для граничной частоты $\left|\nabla\times\vec{B}\right| \sim \omega \, B/c$ и $\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \vec{E} \sim \omega \, \varepsilon \, E$, и приняв $cB \sim E$, получаем

$$\varepsilon_0 \, \omega \, \rho << \frac{1}{\varepsilon - 1}, \tag{4.8}$$

что значительно расширяет диапазон частот. Однако, в действительности, необходимо учитывать дисперсию – зависимость ε от частоты.

Одним из методов исследования уравнений Максвелла заключается в следующем. Умножим уравнение (4.1.c) скалярно на $\vec{B}$, а (4.1.d) на $\vec{E}$, и возьмем разность получаемых выражений:

$$c^2 \, \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - c^2 \, \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right) = \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \vec{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{E}^{\,2} + c^2 \, \vec{B}\cdot\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.$$

Используя тождество $\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$, окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon E^2+c^2B^2}{2}+c^2\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)E^2. \quad (4.5)$$

Выражение справа означает, что потери энергии (диссипация) связаны с проводимостью и производной по времени от диэлектрической проницаемости.

Для учета магнетизма достаточно к параметрам σ и ε ввести еще одну характеристику – магнитную проницаемость μ (для немагнитного вещества $\mu=1$, из термодинамических соображений следует, что $\mu > 0$). Полный ток в этом случае имеет следующий вид:

$$\vec{j}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon-1)\vec{E}+\sigma\vec{E}+\varepsilon_0c^2\nabla\times\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\vec{B}.$$

В итоге это приводит к уравнению (4.1.d) с заменой $c^2\ \nabla\times\vec{B}$ на $c^2\ \nabla\times\frac{1}{\mu}\vec{B}$.

Можно уточнить неравенство (4.8) с учетом магнитной проницаемости. Используя уточненные уравнения Максвелла, найдем

$$\varepsilon_0\ \omega\ \rho \ll \frac{1}{\varepsilon-1/\mu}.$$

Выпишем граничные условия для магнитного поля в случае немагнитного материала. Из одного из уравнений Максвелла $\nabla\cdot\vec{B}=0$ следует, что на границе $B_{\tau 1}=B_{\tau 2}$. Согласно (4.3) $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, поэтому на границе $H_{\tau 1}=H_{\tau 2}$. Горизонтальная проекция магнитного поля пересекает границу немагнитных материалов непрерывны образом.

§ 5. Временная зависимость решений уравнений Максвелла

Решение дифференциальных уравнений – это целое искусство, особенно в плане получения точных решений. Уравнения Максвелла не исключения, не во всех случаях удается решить их “до конца”, часто приходиться прибегать либо к приближенным методам, либо решать численно. Однако, мы в своем повествование будем рассматривать только такие задачи, решение которых можно довести до аналитического выражения, пригодного для сравнения с экспериментом. Часто говорят, что формула доведена до инженерного расчета.

Переменные поля, которые только и рассматриваем, имеют периодическую от времени зависимость. Хотя уравнения Максвелла действительны, но зависимость полей по времени удобно представить в комплексном виде:

$$\vec{E},\ \vec{B}\sim e^{-i\omega t}. \quad (5.1)$$

Мы, фактически, еще не решая сами уравнения Максвелла, уже знаем временную зависимость, т.е. для произвольного вектора (который описывает электрические или магнитные поля) имеем

$$\vec{A}(x,y,z,t)=e^{-i\omega t}\vec{A}(x,y,z).$$

Можно сказать, по-другому, для этого проведем Фурье – преобразование:

$$\vec{A}(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}(x,y,z,\omega)\ e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},$$

после чего получаем уравнение для Фурье – компоненты $\vec{A}(x, y, z, \omega)$. Но такое представление, ввиду того, что измерение обычно проводится на какой-то одной определенной частоте, эквивалентно поиску решения в виде (5.1).

Подставляя (5.1) в (4.1), получаем следующий вид уравнений Максвелла, верных для периодических во времени полей:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\ \omega} \right) \vec{E} = 0\,, \quad (5.2.a) \qquad \nabla \times \vec{E} = i\omega\, \vec{B}\,, \quad (5.2.c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \quad (5.2.b) \qquad c^2\ \nabla \times \vec{B} = \left(-i\ \varepsilon\ \omega + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) \vec{E}\,. \quad (5.2.d)$$

Напомним, уравнения Максвелла мы записываем в СИ. В давно изданных книгах часто используется система СГС. В них уравнения Максвелла выглядят немножко по- другому.

§ 6. Другая запись Максвелла; векторный потенциал; поля вблизи земной поверхности

Уравнения Максвелла в форме (5.2) можно записать в несколько необычном виде. Для этого скобку в (5.2.d) перепишем как

$$-i\omega \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\ \omega} \right).$$

Возникшее выражение в скобках аналогично скобку в (5.2.a). Это позволяет для уравнений Максвелла ввести следующую величину:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\ \omega} \right). \qquad (6.1)$$

Далее, для периодических во времени электромагнитных полей, мы можем заменить $\frac{\partial}{\partial\ t}\ldots$ на $-i\omega\ldots$, и наоборот, поменять $-i\omega\ldots$ на $\frac{\partial}{\partial\ t}\ldots$. В итоге, уравнения Максвелла в форме (5.2), описывающие электромагнитные волны вне своего источника, будут имеют следующий вид:

$$\nabla \cdot k^2\ \vec{E} = 0\,, \qquad (6.2.a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad (6.2.b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial\ t}\,, \qquad (6.2.c)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{-i\ k^2}{\omega} \vec{E}\,. \qquad (6.2.d)$$

Обратим внимание, уравнения записаны в несколько необычном виде, в отличие от традиционного. Напомним, Ричард Фейнман заметил, что всегда полезно иметь разные формы записи физических законов, особенно фундаментальных, к которым относятся и УМ. Если в эти уравнения подставить плоскую волну $\sim \exp(-i\omega\ t + ikx)$, то можно будет выяснить, что введенная соотношением (6.1) величина является квадратом волнового числа.

Из уравнения (2.1.c) и второй теоремы из § 1 следует, что вектор магнитной индукции $\vec{B}$ можно представить как

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{6.3}$$

Тогда $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ тождественно. Этим самым вводим важную и полезную величину – **векторный потенциал** $\vec{A}$. Она нам в дальнейшем очень пригодится.

Непосредственно в приповерхностном слое земли под влиянием внешних электромагнитных полей заряды, слагающие сплошную среду, находятся в вечном движении. Об этом говорят, что на поверхности земли текут *магнитотеллурические токи*. Их наличие для задач геофизики проявляется двояко. Во-первых, они препятствуют проникновению создающих их полей вглубь земли. Во-вторых, магнитное поле вблизи поверхности будет иметь только одну горизонтальную компоненту. Последнее означает, что если декартовы координаты ориентированы так, что оси *x*, *y* лежат на поверхности земной поверхности, ось *z* направлена по нормали от поверхности в свободное пространство, и распространение поля происходит вдоль оси *x*, то

> **вектор магнитной индукции $\vec{B}$ вблизи земной поверхности имеет только одну ненулевую компоненту $B_y(x,z)$, ортогональную направлению распространения электромагнитной волны:**

$$\vec{B} = (0,\ B_y(x,z), 0). \tag{6.4}$$

В декартовой системе координат

$$(\nabla \times A)_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y, \ \dots .$$

Многоточие означает циклическую перестановку $xyz \to zxy \to yzx$. Поскольку все величины зависят только от *x* и *z*, то

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} A_y,\ B_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z,\ 0 = \frac{\partial}{\partial x} A_y.$$

Видим, что от A_y ничего не зависит. Его вообще можно положить равным нулю! Что мы и сделаем. Далее используем уравнение $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (и (6.3)), согласно которым

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} A_z = 0.$$

Это равенство дает одно соотношение для двух величин. Поскольку от переменной *y* ничего не зависит, то одну их этих величин можно игнорировать. Оказывается, удобно положить $A_x = 0$. Таким образом, векторный потенциал в декартовой системе координат имеет следующие компоненты:

$$\vec{A} = (0,\ 0, A_z(x,z)). \tag{6.5}$$

Векторный потенциал вблизи земной поверхности имеет только одну ненулевую вертикальную компоненту.

Радиус-вектор $\vec{r}$ в декартовых координатах есть $\vec{r} = (x,y,z)$. В цилиндрических координатах $\vec{r} = (r,\varphi,z)$. Поскольку $(\nabla \times A)_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y$ и циклическая перестановка:

$$(\nabla \times A)_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z, \qquad (\nabla \times A)_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x.$$

Вектор магнитной индукции в цилиндрической системе координат $\vec{B} = (0, B_\varphi(r,z), 0)$. В этом случае

$$\vec{A} = (0,\ 0, A_z(r,z)).$$

В сферических координатах $\vec{r} = (r, \varphi, \theta)$. Поскольку вектор магнитной индукции $\vec{B} = (0, B_\varphi(r,\theta), 0)$ зависит только от r и θ, то единственная ненулевая компонента

$$B_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\theta \neq 0.$$

Тогда

$$\vec{A} = (0,\ 0, A_\theta(r,\theta)).$$

Видим, что в разных системах координат векторный потенциал имеет одинаковое количество ненулевых компонент.

Для вектора электрического поля вблизи земной поверхности можно легко установить, что в декартовой системе координат он будет иметь две ненулевые компоненты:

$$\vec{E} = (E_x(x,z),\ 0, E_z(x,z)).$$

Это же будет верно в цилиндрической и сферической системах координат.

§ 7. Граничные условия для векторного потенциала

При пересечении границы разных немагнитных сред тангенциальные компоненты электромагнитного поля не могут иметь разрывов. Действительно, плоская граница для реальных материалов является градиентной, которую можно представить состоящей из множества слоев. И если бы тангенциальные компоненты на каждом слое испытывали скачек, то в сумме от всех слоев электромагнитная волна настолько бы изломалась, что ни о какой электромагнитной волне уже нельзя было бы говорить. Напомним, мы везде рассматриваем немагнитные среды.

Наличие границы раздела двух сред означает, что в первой среде обязательно присутствуют две волны, падающая и отраженная, а во второй среде обязательно будет преломленная волна. Равенство тангенциальных компонент на границе $z = 0$ для магнитной индукции означает (для немагнитных сред граничные условия приведены в § 5) что:

$$\text{при } z = 0 \qquad B_{y1} + B_{y1}' = B_{y2}. \tag{7.1}$$

И аналогично для электрической горизонтальной компоненты:

$$\text{при } z = 0 \qquad E_{x1} + E_{x1}' = E_{x2}. \tag{7.2}$$

Согласно формулам (6.3)

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial\ x}. \tag{7.3}$$

Тогда условие (7.1) принимает следующий вид:

$$\text{при } z = 0 \qquad \frac{\partial A_{1z}}{\partial\ x} + \frac{\partial A_{1z}'}{\partial\ x} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial\ x}. \tag{7.4.a}$$

С другой стороны, равенство (7.1) верно для любых векторов, в том числе и для векторного потенциала. Поэтому

$$\text{при } z = 0 \qquad A_{y1} + A_{y1}' = A_{y2}\,. \tag{7.4.b}$$

Сравнение его с (17.4.a) позволяет заключить, что на границе раздела сред производную по координате на плоскости границы можно опускать, в данном случае производную $\partial / \partial x$. Результат граничного условия от этого не будет зависеть.

Далее, из (6.2.d) имеем

$$E_x = \frac{i\omega}{k^2}(\nabla \times B)_x = -\frac{i\omega}{k^2}\frac{\partial B_y}{\partial\ z}\,. \tag{7.5}$$

Подставляя (7.3), получаем

$$E_x = \frac{i\omega}{k^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\ x\,\partial\ z}\,. \tag{7.6}$$

И для наших падающего, отраженного и преломленного волн имеем еще одно граничное условие:

$$\text{при } z = 0 \qquad \frac{1}{k_1{}^2}\frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial\ x\,\partial\ z} + \frac{1}{k_1{}^2}\frac{\partial^2 A_{1z}'}{\partial\ x\,\partial\ z} = \frac{1}{k_2{}^2}\frac{\partial^2 A_{2z}}{\partial\ x\,\partial\ z}\,. \tag{7.7}$$

Причем, согласно выше сказанному, производную по x можно опустить. И вместо (7.7) можно пользоваться граничным условием в виде

$$\text{при } z = 0 \qquad \frac{1}{k_1{}^2}\frac{\partial A_{1z}}{\partial\ z} + \frac{1}{k_1{}^2}\frac{\partial A_{1z}'}{\partial\ z} = \frac{1}{k_2{}^2}\frac{\partial A_{2z}}{\partial\ z}\,. \tag{7.8}$$

В литературе условие (7.8) обычно записывают в другом виде. Именно, вместо $\frac{1}{k^2}$ пишут $\frac{1}{\varepsilon'}$, где ε' называют комплексной диэлектрической проницаемостью.

На этом закончим рассказывать об уравнениях Максвелла, и о величинах, которые они содержат. Оказывается, уравнения Максвелла описывают, как ведут себя в свободном пространстве и в сплошной среде электрические и магнитные поля. Для учета электрического строения сплошных сред достаточно ввести два параметра – диэлектрическую проницаемость и проводимость. Зондирование сплошных сред производится внешними электромагнитными полями. Если их длина волны больше размеров атомов и молекул, то эти параметры можно считать постоянными, не зависящими от частоты внешних электромагнитных полей. От Фейнмановских лекций по физике наше изложение отличается более подробным изложением граничных условий.