Районная научно-практическая конференция школьников

«Я намечаю путь к открытию…»

 Муниципальное образование

 п. г. т. Уренгой

 Пуровского района ЯНАО

 секция: математика

**« РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ»**

**Научно-исследовательская работа по математике**

 **Автор:**

 Смирнов Александр Алексеевич,

 МБОУ «Средняя общеобразовательная

 школа №1», 8б класс

 **Руководитель работы:**

 Борисова Наталья Владимировна,

 учитель математики

п.г.т. Уренгой

2013-2014

**I. Введение**

Каждый человек сталкивается с математикой в течение всей жизни. Мы начинаем изучать её в детском саду, сдаём по этому предмету государственные экзамены, а для кого-то она становится профессией.

В 8-ом классе согласно учебному плану на изучение математики отводится 6 часов в неделю. Но математика – сложный предмет, и часто многим ученикам даже 6-ти часов бывает недостаточно, чтобы усвоить материал. Работая у доски, выполняя домашние задания и наблюдая за одноклассниками, я заметил, что наибольшее затруднение вызывает решение текстовых задач. Такого же мнения придерживаются и учителя математики. И это не удивительно. Решение текстовых задач – деятельность, сложная для учащихся. Сложность её определяется комплексным характером работы, ведь большинство подобных задач решаются с помощью уравнений или систем уравнений, а значит нужно ввести переменную и суметь перевести условие на математический язык. Затем соотнести полученный результат с условием задачи и, если необходимо, найти значение ещё каких-то величин. Каждый из этих этапов самостоятельная и совсем не простая задача.

Изучая тему «Рациональные уравнения», мы решали текстовые задачи каждый урок. Даже прилежным ученикам было нелегко. Невольно стали появляться мысли о поиске другого, более простого пути решения текстовых задач. Однажды на уроке мы решили задачу с помощью интересного рисунка, который учитель назвал «сетевым графом». Решение было простым, и этот вопрос настолько заинтересовал меня, что я поставил перед собой цель: опытным путем выяснить, можно ли любую задачу, решаемую с помощью рационального уравнения, решить с помощью графов.

Для достижения указанной цели была изучена учебная литература по теме, после чего выполнена практическая работа обучающего характера по решению задач с помощью графов. Затем был проведен эксперимент, подтвердивший возможность решения текстовых задач без использования рациональных уравнений, и сделан вывод об универсальности сетевых графов.

**II. Решение задач с помощью графов**

**II.1. Немного истории**

Теория графов в сравнении с другими математическими дисциплинами довольно молодая наука. В 1736 году Санкт-Петербургская академия наук опубликовала труд молодого талантливого математика Леонарда Эйлера, где рассматривалась задача о кенигсбергских мостах ("Можно ли, пройдя все городские мосты ровно по одному разу, вернуться в исходную точку?"). Это была первая работа по будущей теории графов.

Позже Д.К. Максвелл и Г.Р. Кирхгоф на основе исследования электрических цепей сформулировали некоторые принципы сетевого анализа. Были разработаны методы расчета наибольшей пропускной способности телефонных линий. В 40-х годах в результате развития теории исследования операций был разработан ряд математических методов, необходимых для анализа больших систем. В 50–60-х годах проводились работы по построению новых сетевых моделей и разработке алгоритмов их решения на основе элементов теории графов. Развитием электронно-вычислительной техники, которая позволила решить многие задачи алгоритмизации, дало новый виток развитию теории графов. И все же родиной нового направления в математике по праву считается Россия.

В деятельности современного общества большинство возникающих задач удобно представлять для восприятия и анализа в виде сетей, которые позволяют ответить на два главных вопроса: до какого места необходимо дойти (цель) и какой путь следует избрать (как). Например, коммерческую деятельность можно рассматривать как совокупность задач, предназначенных для передвижения, складирования и распределения товаров, денег, документов, информации о поставках и покупателях. Наглядность и логическая обоснованность методов сетевого анализа позволяет выбрать довольно естественный подход к решению коммерческих задач. Сетевые модели для людей, не занимающихся научной работой, являются более понятными, чем другие модели, поскольку для них лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. В значительной степени методы сетевого анализа основаны именно на теории графов – области математики, которая учит переводить любую информацию на графический язык, и делает доступным решение задачи любой сложности.

**II.2. Графы: определения и примеры**

Перейдем к изложению некоторых понятий современной теории графов.

Граф – это двойка {V, E}, где V – непустое множество вершин, а Е – множество ребер, соединяющих эти вершины попарно. Две вершины, связанные между собой ребром, равноправны, и именно поэтому такие графы называются неориентированными: нет никакой разницы между "началом" и "концом" ребра. Некоторые примеры неориентированных графов приведены в Таблице 1 (см. Приложение).

Говоря простым языком, граф – это множество точек и попарно соединяющих их линий (не обязательно прямых). В графе важен только факт наличия связи между двумя вершинами. От способа изображения этой связи структура графа не зависит.

Из приведенного определения вытекает, что в графах не бывает петель – ребер, соединяющих некоторую вершину саму с собой. Кроме того, в классическом графе не бывает двух различных ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин.

Ребро и вершина называются инцидентными друг другу, если вершина данная является одним из концов указанного ребра. Любому ребру инцидентно ровно две вершины, а вот вершине может быть инцидентно произвольное количество ребер, это количество и определяет степень вершины. Изолированная вершина вообще не имеет инцидентных ей ребер (ее степень равна 0). Две вершины называются смежными, если они инцидентны одному ребру (являются разными концами одного ребра). Аналогично, два ребра называются смежными, если они инцидентны одной вершине. На рисунке 1 (см. Приложение) приведены примеры графа и псевдографа.

Путь в графе – это последовательность вершин (без повторений), в которой любые две соседние вершины смежны. Длина пути – количество ребер, из которых этот пусть состоит. Например, длина пути badc графа на рисунке 1 равна 3.

Вершина с достижима из вершины b, если существует путь, начинающийся в с и заканчивающийся в b. Граф называется связным, если все его вершины взаимно достижимы. Структура, изображенная на рисунке 2 (см. Приложение) является несвязным графом.

Расстояние между вершинами а и с – это длина кратчайшего пути от а до с. Из этого определения видно, что расстояние между вершинами a и c в графе на рисунке 1 равно 2.

Цикл – это замкнутый путь. Все вершины в цикле, кроме первой и последней, должны быть различны. Например, циклом является путь abda в графе на рисунке 1.

Граф, в котором существует путь или цикл, содержащий все ребра графа, называется Эйлеровым (вершины при этом могут повторяться). Именно такой граф присутствовал в решении упомянутой задачи о кенигсбергских мостах.

Гамильтонов граф – это граф, в котором существует путь или цикл, содержащий все вершины графа без повторений.

Граф называется ориентированным (или орграфом), если все его ребра имеют направление. Такие направленные ребра называют дугами. На рисунках ребра изображаются отрезками, а дуги – стрелками. (Рисунок 3, см. Приложение)

В отличие от ребер, дуги соединяют две неравноправные вершины: одна из них называется началом дуги (дуга из нее исходит), вторая – концом дуги. Если в графе присутствуют и ребра, и дуги, то его называют смешанным.

Все основные понятия, определенные для неориентированных графов (инцидентность, смежность, достижимость, длина пути и т.п.), работают и для орграфов. Нужно лишь заменить слово "ребро" словом "дуга". Степень вершины в орграфе - это не одно число, а пара чисел: первое характеризует количество исходящих из вершины дуг, а второе – количество входящих дуг.

**II.3. Деревья**

Дерево – это частный случай графа, наиболее широко применяемый в программировании и комбинаторике.

Дерево – это связный граф без циклов, между любыми двумя вершинами которого существует ровно один путь. Если у дерева N вершин, то количество ребер всегда ровно N-1.

Аналогичным образом определяется и ориентированное дерево – как орграф, в котором между любыми двумя вершинами существует не более одного пути. Любое дерево иллюстрирует строгую иерархию. Примером может служить армия – вершинами являются люди, а дугами – отношения командир-подчиненный.

Корневое дерево – это ориентированное дерево, в котором можно выделить вершиныт рех видов: корень, листья (или терминальные вершины) и остальные вершины (нетерминальные); причем должны выполняться обязательные условия:

* из листьев не выходит ни одна дуга; из других вершин может выходить сколько угодно дуг;
* в корень не заходит ни одна дуга; во все остальные вершины заходит ровно по одной дуге.

Традиционно в математике и родственных ей науках деревья "растут" вниз головой: это делается просто для удобства наращивания листьев в случае необходимости. Таким образом, на рисунках корень дерева оказывается самой верхней вершиной, а листья – самыми нижними. Иными словами, у корня нет предков, у листа нет потомков.

Высота корневого дерева – это максимальное количество дуг, отделяющих листья от корня. Пример корневого дерева приведен на рисунке 4 (см. Приложение).

**II.4. Ход работы**

Исследование началось с теоретической подготовки. Я познакомился с историей возникновения графов, изучил терминологию. Разобрав примеры решения простейших задач, я перешел к практической части своей работы. Для подтверждения гипотезы из «Сборника заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы» Л.В.Кузнецовой, Е.А.Бунимович и др. наугад было выбрано 10 текстовых задач. В ходе дальнейшей работы эти задачи были решены сначала «классическим» методом (с помощью рациональных уравнений), а затем с помощью графов. Сравнительный анализ проводился по трем параметрам:

1. Время, затраченное на решение 10 задач (в минутах).
2. Объем математических выкладок (в страницах рукописного текста).
3. Субъективное ощущение «трудности» в каждом случае.

Каждая задача решалась первым, затем вторым способом. Решение в каждом случае записывалось в тетрадь. Время, затраченное на решение, фиксировалось. Результаты эксперимента заносились в таблицу 2 (см. Приложение). После чего был сделан вывод, подтвердивший гипотезу.

**II.5. Примеры решения задач**

Задача 1.

Автобус шел 2 часа со скоростью 45 км/ч и 3 часа со скоростью 60 км/ч. Какой путь прошел автобус за это время?

Решение.

Обозначим величины, характеризующие процесс, кругами, а связи между ними – отрезками.

S1+S2

S2

*V*2

t2

t1

*V*1

S1

S = *V* ⋅ t

Получаем сетевой граф, состоящий из 7 элементов, связанных тремя ребрами. Известные элементы выделены цветом. Зная два элемента на одном ребре, может найти неизвестный элемент ребра.

45 ⋅ 2 + 60 ⋅ 3 = 270 (км)

Ответ: 270 км

Задача 2.

Велосипедист за 4 часа проехал 92 км. Сколько времени ему потребуется, чтобы с той же скоростью проехать 57,5 км?

Решение.

Строим граф. В этой задаче скорость движения не изменяется, поэтому можно использовать такой вид графа.

S2

S1

*V*

t1

t2

S = *V* ⋅ t

57,5 : (92 : 4) = 2,5 (часа)

Ответ: 2,5 часа

Задача 3.

Машина прошла первый участок пути за 3 часа, а второй за 2 часа. Длина обоих участков вместе 267 км. С какой скоростью шла машина на каждом участке, если скорость на втором участке была на 8,5 км/ч больше, чем на первом?

Решение.

S2

*V*2

t2 = 2 ч

S1

*V*1

t1 = 3 ч

S = 267 км

*V*2 > *V*1 на 8,5 км/ч

S = *V* ⋅ t

(267 – 8,5 ⋅ 2) : (3 + 2) = 50 (км/ч) – скорость на первом участке

50 + 8,5 = 58,5 (км/ч) скорость на втором участке

Ответ: 50 км/ч и 58,5 км/ч

Задача 4.

За 9 часов по течению реки теплоход проходит тот же путь, что и за 11 часов против течения. Найти собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

Решение.

*V* против теч

t против теч = 11 ч

t по теч = 9 чч

*V* по теч

S

S = *V* ⋅ t

В задачах на движение «по течению и против течения» целесообразно вводить дополнительный граф, иллюстрирующий связи скоростей.

*V* теч = 2 км/ч

*V* собст

*V* против теч

*V* по теч

Работаем с дополнительным графом: выражаем скорость по и против течения. Переносим результаты на основной граф.

(9 + 11) ⋅ 2 : 2 = 20 км/ч

Ответ: 20 км/ч

Задача 5.

Из А и В одновременно выехали два мотоциклиста. Скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого. Мотоциклист, первым прибывший в В, сразу же отправился обратно и встретил второго мотоциклиста через 2 часа 24 минуты после выезда из А. Найти скорость каждого мотоциклиста, если расстояние между А и В равно 120 км.

Решение.

Для того, чтобы выявить связь между S1 и S2, изобразим эти величины на отрезке прямой. Первый мотоциклист проехал расстояние, равное АВ + ВС, второй – равное АС.

120 км

С

В

А

АВ + ВС + АС = 2АВ

Каждый мотоциклист был в пути 2 часа 24 минуты или 2,4 часа.

Строим основной граф.

S1 + S2

*V*1 >*V*2 в 1,5 раза

*V* 2

S2

S1

*V* 1

 t

S = *V* ⋅ t

По ребру 4 находим *V*2 = 2 ⋅ 120 : 2,4 : 5 ⋅ 2 = 40 (км/ч).

Тогда *V*1 = 40 ⋅ 1,5 = 60 (км/ч)

Ответ: 60 км/ч и 40 км/ч

Задача 6.

Один штукатур может выполнить задание на 5 часов быстрее другого. Оба вместе они выполняют задание за 6 часов. За сколько часов каждый из них выполнит это задание?

Решение.

В этой задаче речь идет о работе. Обозначим работу через А, затраченное время через t, а производительность через k.

t = 6 ч

t1 < t2 на 5 ч

t1

 k1

A = 1

k2

 t2

k = k1 + k2

A = k ⋅ t

В задаче прослеживается три процесса: работа каждого из двух штукатуров по отдельности и совместная работа. Выполняемую работу, которая в задаче не имеет числового значения, для удобства обозначим за 1.

Работая по схеме t1 – t2 – k1 – k2 – k = k1 + k2, находим, что t1 = 10 часам, t2 = 15 часам.

Ответ: 10 часов, 15 часов.

Задача 7.

Туристы совершили три перехода в 12,5, 18 и 14 км, причем скорость на первом переходе была на 1 км/ч меньше скорости на втором переходе и на столько же больше скорости на третьем. На третий переход они затратили на 30 минут больше, чем на второй. Сколько времени занял весь поход?

Решение.

Путь решения: V1 – V2 – V3 – t2 – t3 – (t3 – t2) = 0,5

*V*1 = 5 км/ч, *V*2 = 6 км/ч, *V*3 = 4 км/ч, t1 = 2,5ч, t2 = 3ч, t3 = 3,5ч.

Тогда t = 2,5 + 3 + 3,5 = 9 часов

 t2

 t3>t2 на 0,5 ч

t1

*V* 1>*V*3 на 1 км/ч

*V* 1

S1 = 12,5 км

S2 = 18 км

S3 = 14 км

*V* 2

*V* 3

*V* 1<*V*2 на 1 км/ч

 t3

S = *V* ⋅ t

Ответ: 9 часов.

**II.6. Вывод**

В начале работы была поставлена цель: исследовать возможность решения текстовых задач с помощью графов. Для достижения указанной цели были намечены следующие задачи:

* изучить учебную литературу по теме
* провести эксперимент – практическую работу по решению текстовых задач
* провести сравнительный анализ полученных результатов
* сделать вывод, подтверждающий (или опровергающий) гипотезу

По окончании работы можно отметить следующее. После того, как была изучена тематическая литература и освоены основные приемы работы с графами, был проведен эксперимент, составивший основную часть исследования. В ходе эксперимента были решены 10 задач. Сравнительный анализ результатов показал явное преимущество графов над рациональными уравнениями по каждому из трех параметров исследования. Результаты, отраженные в Таблице 2 (см. Приложение) позволяют утверждать, что метод решения задач с помощью графов является более быстрым и простым в применении, чем решение задач с помощью уравнений.

Опираясь на вышесказанное, можно сделать вывод, что цель нашей работы достигнута, гипотеза о простоте и универсальности метода решения задач с помощью графов подтверждена.

**III. Заключение**

Математическое образование в системе основного образования занимает одно из ведущих мест, что определяется безусловной практической значимостью математики, ее проникновением буквально во все сферы человеческой деятельности и возможностями в развитии и формировании мышления современного человека.

С другой стороны актуальным остается вопрос дифференциации обучения математики, позволяющей и обеспечить базовую математическую подготовку, и удовлетворить потребности учащихся, проявляющих интерес и способности к предмету.

Исследование, описанное в нашей работе, не выходя за рамки школьной программы по математике, в очередной раз доказало универсальность и вариативность математических методов, наглядно продемонстрировав, что образованному человеку наука всегда оставляет право выбора способа действия.

Мне понравилось заниматься исследовательской деятельностью. Это интересно, значительно расширяет кругозор и дает навыки научной работы, которые пригодятся мне при учебе в ВУЗе.

Конечно, я столкнулся с некоторыми трудностями. Пришлось изучить много теоретического материала по теме и научиться строить графы. Процесс решения задач так же отнял немало времени. Мы долго не могли прийти к соглашению относительно критериев сравнения исследуемых методов. Здесь следует заметить, что третий параметр анализа («трудность» решения) не является строго научным, а точнее является совсем не научным. Но так как одной из задач нашего исследования было найти более легкий, понятный и доступный для среднего ученика способ решения, то применение этого критерия для сравнительного анализа двух методов является вполне обоснованным.

И, главное, нам полностью удалось доказать преимущество альтернативного метода решения задач в сравнении с традиционным.

Данную разработку можно рекомендовать учителям математики для изучения материала на элективных курсах и факультативных занятиях.

**Список литературы**

1. «Соросовский образовательный журнал» №11 1996 (ст. «Плоские графы»);1987 (часть 2)
2. Березина Л.Ю. Графы и их применение. М., 1979.
3. Берж К. Теория графов и ее применение, М.: ИЛ, 1962;
4. Гарднер М. Математические досуги, М: Мир, 1972(глава 35);
5. Гончаров Л.В. Предметные недели в школе. Математика. Волгоград: Учитель, 2003.
6. Зыков А. А. Теория конечных графов, Новосибирск: Наука, 1969;
7. Изд. дом Первое сентября, еженедельная учебно-методическая газета Математика, № 48, 2001.
8. Касаткин В. Н. Необычные задачи математики, Киев: Радяньска школа, 2009
9. Научно-теоретический и методический журнал “Математика в школе” № 1, 4, 2004.
10. Никольская И.Л Факультативный курс по математике 7–9, М: Просвещение, 1991
11. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи, М: Наука, 1988
12. Оре О. Графы и их применения, М: Мир, 1965;
13. Реньи А., Трилогия о математике, М: Мир, 1980.
14. Фирсов Е.Г. Интеллектуальные игры для школьников, Ярославль: Академия развития, 1998.
15. Кузнецова Л.В, Бунимович Е.А. и др.Алгебра. Сборник заданий для проведения письменного экзамена за курс основной школы. 9 класс, М.: Дрофа, 2008

**Приложение**

**Таблица 1**

Примеры неориентированных графов

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Граф** | **Вершины** | **Ребра** |
| семья | люди | родственные связи |
| город | перекрестки | улицы |
| локальная сеть | компьютеры | кабели |
| лабиринт | развилки и тупики | переходы |
| метро | станции | линии |

**Рисунок 1**



 Рисунок 1. Граф и псевдограф

**Рисунок 2**



 Рисунок 2.  Несвязный граф

**Рисунок 3**

****

Рисунок 3. Орграф

**Рисунок 4**



Рисунок 4. Корневое дерево высоты 3

**Таблица 2**

Таблица результатов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Номер задачи** | **Затраченное время, мин.** | **Объем записи, стр.** | **Трудность, 1 – 10**  |
| уравнение | граф | уравнение | граф | уравнение | граф |
| Задача 1 | 5 | 3 | 0,3 | 0,2 | 2 | 1 |
| Задача 2 | 6 | 4 | 0,3 | 0.2 | 3 | 2 |
| Задача 3 | 7 | 4 | 0,4 | 0,2 | 4 | 2 |
| Задача 4 | 7 | 3 | 0,6 | 0,2 | 4 | 2 |
| Задача 5 | 9 | 4 | 0,8 | 0,3 | 5 | 4 |
| Задача 6 | 8 | 5 | 0,9 | 0,3 | 6 | 3 |
| Задача 7 | 12 | 6 | 1,2 | 0,4 | 7 | 4 |